高等学校教材

工程数学

积分变换

（第四版）

东南大学数学系　张元林编

高等教育出版社

内容简介

本书介绍 Fourier 变换和 Laplace 变换这两类积分变换的基本内容，初版于 1978 年，再版于 1982 年，三版于 1989 年. 本次修订，其基本内容符合原国家教委 1995 年颁布的《工程数学课程教学基本要求》（“积分变换”部分）；为方便使用，保持了第三版的系统和结构；同时也增添了一些内容，并加强了该书的实用性，以适应不同专业和不同层次的要求；书中的例题与习题也作了适量的补充与调整. 书后附有 Fourier 变换简表和 Laplace 变换简表可供学习时查用. 书中给出习题答案可供参考.

本书可供高等院校非数学专业的有关专业本科生选作教材，也可作为工科研究生的教材或教学参考书，亦可供广大工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学. 积分变换/张元林编. —4 版. —北京：高等教育出版社，2003.12(2009 重印)

ISBN 978-7-04-012955-7

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
印　刷	天津新华一印刷有限公司		
		版　次	1978 年 12 月第 1 版 2003 年 12 月第 4 版
开　本	850×1168　1/32		
印　张	5.5	印　次	2009 年 8 月第 13 次印刷
字　数	130 000	定　价	8.10 元

物料号　12955-00

目　录

第四版前言

本书第三版自 1989 年 5 月出版以来，为许多院校用作教材．经过 10 多年教学实践的检验，受到了同行和广大读者的欢迎．同时他们也提出了宝贵的意见和建议，这也是促成本次修订的理由．在此谨表谢忱．

此次修订的另一个动因，则是课程体系与设置、教材的建设与改革须与时俱进．10 多年来，改革开放不断深入，我国经济建设和科学技术迅速发展，教育环境发生了很大变化，教学改革取得很大进展，本书的再次修订也是适应时代进步的必然．

高等教育出版社高等理工分社的支持又使本书的此次修订由编者和读者的愿望变成了现实．在此同样表示感谢．

本次修订，其基本内容符合原国家教委 1995 年颁布的《工程数学课程教学基本要求》，为满足各类专业及不同层次的需求，并体现理论联系实际的原则，加强了本书的实用性．如此更有利于学生学以致用，也可使本书成为有关专业的研究生、教师和从事相关工作的技术人员的参考用书．在保持第三版系统和结构的前提下，本版增加了一些内容．第一章增加了 § 1.5 Fourier 变换的应用，其中给出“微分、积分方程的 Fourier 变换解法”和“偏微分方程的 Fourier 变换解法”两小节；第二章在 § 2.5 Laplace 变换的应用中充实了微分方程的 Laplace 变换解法的内容，增加了“偏微分方程的 Laplace 变换解法”一小节；同时在这两章中，还调整和补充了适量的例题和习题．

积分变换应用广泛，本书只能给出一些最基本的内容和应用范例，以求举一反三之效，从而激活读者思维，开阔思路，扩大视野，增强其学习兴趣．书中有星号 * 的内容可根据不同专业、不同

教学时数等情况加以取舍.它们也可供对此有兴趣的读者和学有余力的学生参考.

本书第三版的编者署名为南京工学院数学教研组,而南京工学院早于1988年更名为东南大学.因此,本书第四版即如封面所署名,特此说明,以免混淆.

由于编者水平所限,书中错误或不妥之处在所难免,殷切希望使用本书的教师及广大读者批评指正,以期日后再作修订.

编者

2003年6月于南京

引　言

在数学中,为了把较复杂的运算转化为较简单的运算,常常采取一种变换手段.例如数量的乘积或商可以通过对数变换变成对数的和或差,然后再取反对数,即得到原来数量的乘积或商.这一方法的实质就是把较复杂的乘除运算通过对数变换化为较简单的加减运算(当然,上述运算是依赖于对数表来完成的).再如解析几何中的坐标变换、复变函数中的保角变换等都属于这种情况.所谓积分变换,就是通过积分运算,把一个函数变成另一个函数的变换,一般是含有参变量 α 的积分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)K(t,\alpha)\mathrm{d}t.$$

它的实质就是把某函数类 A 中的函数 $f(t)$ 通过上述积分的运算变成另一函数类 B 中的函数 $F(\alpha)$,这里 $K(t,\alpha)$ 是一个确定的二元函数,称为积分变换的核.当选取不同的积分域和变换核时,就得到不同名称的积分变换.例如变换核 $K(t,\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$,积分域 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$,则有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,(\omega\text{ 为实变量});$$

变换核 $K(t,s)=\mathrm{e}^{-st}$,积分域 $(a,b)=(0,+\infty)$,则有

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,(s\text{ 为复变量}).$$

它们分别称为 Fourier 变换和 Laplace 变换(在应用数学中,常用的积分变换还有 Fourier 正弦变换,Fourier 余弦变换,Hankel 变换和 Mellin 变换等).$f(t)$ 称为象原函数,$F(\alpha)$ 称为 $f(t)$ 的象函数,在一定条件下,它们是一一对应而变换是可逆的.

用积分变换去解微分方程或其它方程,就如同用对数变换计

算数量的乘积或商一样.如果从原方程中直接求未知的解 y 有困难或较为复杂时,则可求它的某种积分变换的象函数 Y,然后再由求得的 Y 去找 y.当然,这种变换的选择应当使得由原来关于 y 的方程经变换得到的关于 y 的象函数 Y 的方程是容易求解的.一般地说,在这种变换之下,原来的偏微分方程可以减少自变量的个数直至变成常微分方程;原来的常微分方程可以变成代数方程,从而使得在函数类 B 中的运算简化,找出在 B 中的一个解,再经过逆变换,就得到原来要在函数类 A 中所求的解(当然,上述求变换与求逆变换是可以依赖于积分变换表来完成的).

积分变换的理论和方法不仅在数学的许多分支中,而且在其它自然科学和各种工程技术领域中均有着广泛的应用,它已成为不可缺少的运算工具.本书要介绍的是最常用的两类积分变换:Fourier 变换和 Laplace 变换.我们着重讨论它们的定义、性质及某些应用.

第一章 Fourier 变换

§1.1 Fourier 积分

在学习 Fourier 级数的时候,我们已经知道,一个以 T 为周期的函数 $f_T(t)$,如果在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件(即函数在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足:1° 连续或只有有限个第一类间断点;2° 只有有限个极值点),那么在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上就可以展成 Fourier 级数.在 $f_T(t)$ 的连续点处,级数的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),\tag{1.1}$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$,

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

为了今后应用上的方便,下面把 Fourier 级数的三角形式转换

为复指数形式. 利用 Euler 公式[①]

$$\cos\varphi=\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi=\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}=-j\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2},$$

此时,(1.1)式可写为

$$\begin{aligned}f_T(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2}+b_n\frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j}\right]\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega t}\right].\end{aligned}$$

如果令

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)dt,$$

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{a_n-jb_n}{2}\\&=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\,dt-j\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\,dt\right]\\&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)[\cos n\omega t-j\sin n\omega t]dt\\&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jn\omega t}dt\quad(n=1,2,3,\cdots),\end{aligned}$$

$$c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{jn\omega t}dt\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

而它们可合写成一个式子

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jn\omega t}dt\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

若令

① 数学中常用"i"表示虚数单位,这里用"j"是按照电工学中通常的习惯.

$$\omega_n=n\omega\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

则(1.1)式可写为

$$\begin{aligned}f_T(t)&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[c_ne^{j\omega_nt}+c_{-n}e^{-j\omega_nt}]\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{j\omega_nt},\end{aligned}$$

这就是 Fourier 级数的复指数形式. 或者写为

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_nt}.\tag{1.2}$$

下面我们来讨论非周期函数的展开问题. 任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T\to+\infty$ 时转化而来的. 为了说明这一点,我们作周期为 T 的函数 $f_T(t)$,使其在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 之内等于 $f(t)$,而在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 之外按周期 T 延拓到整个数轴上,如图 1-1 所示. 很明显,则 T 越大,$f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围也越大,这表明当 $T\to+\infty$ 时,周期函数 $f_T(t)$ 便可转化为 $f(t)$,即有

$$\lim_{T\to+\infty}f_T(t)=f(t).$$

这样,在(1.2)式中令 $T\to+\infty$ 时,结果就可以看成是 $f(t)$ 的展开式,即

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_nt}.$$

当 n 取一切整数时,ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上,如图 1-2 所示. 若两个相邻点的距离以 $\Delta\omega_n$ 表示,即

$$\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T},\text{或 }T=\frac{2\pi}{\Delta\omega_n},$$

则当 $T\to+\infty$ 时,有 $\Delta\omega_n\to0$,所以上式又可以写为

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_nt}\Delta\omega_n.\tag{1.3}$$

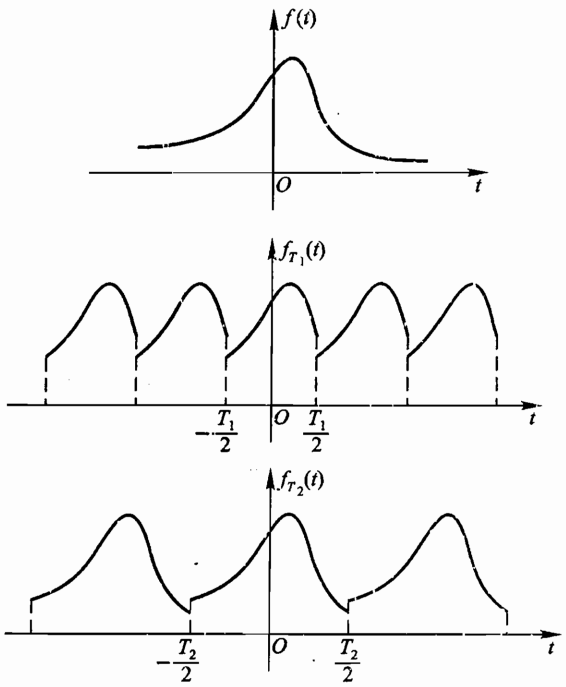


图 1－1

图 1－2

当 t 固定时，$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}$ 是参数 ω_n 的函数，记为 $\Phi_T(\omega_n)$，即

$$\Phi_T(\omega_n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}.$$

利用 $\Phi_T(\omega_n)$ 可将(1.3)式写成

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega_n.$$

很明显，当 $\Delta\omega_n\to 0$，即 $T\to+\infty$ 时，$\Phi_T(\omega_n)\to\Phi(\omega_n)$，这里

$$\Phi(\omega_n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}.$$

从而 $f(t)$ 可以看作是 $\Phi(\omega_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega_n)d\omega_n,$$

即
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)d\omega,$$

亦即
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega.$$

这个公式称为函数 $f(t)$ 的 **Fourier 积分公式**. 应该指出，上式只是由(1.3)式的右端从形式上推出来的，是不严格的. 至于一个非周期函数 $f(t)$ 在什么条件下，可以用 Fourier 积分公式来表示，有下面的收敛定理.

Fourier 积分定理 若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足下列条件：1° $f(t)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件；2° $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积（即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛），则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \text{①} \qquad (1.4)$$

成立，而左端的 $f(t)$ 在它的间断点 t 处，应以 $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$

---

① 式中的广义积分都是在主值意义下的，所谓主值意义是指

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}f(x)dx.$$

来代替. 这个定理的条件是充分的,它的证明要用到较多的基础理论,这里从略.

(1.4)式是 $f(t)$的 Fourier 积分公式的复数形式,利用Euler公式,可将它转化为三角形式. 因为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau\right]d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau + \right. \\ &\qquad \left. j\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega, \end{aligned}$$

考虑到积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$ 是 ω 的奇函数,就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega = 0,$$

从而

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega, \qquad (1.5)$$

又考虑到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

是 ω 的偶函数,(1.5)又可写为

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega. \qquad (1.6)$$

这便是 $f(t)$的 Fourier 积分公式的三角形式.

在实际应用中,常常要考虑奇函数和偶函数的 Fourier 积分公式. 当 $f(t)$为奇函数时,利用三角函数的和差公式,(1.6)式可写为

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau + \sin\omega t\sin\omega\tau)d\tau\right]d\omega.$$

由于 $f(\tau)$为奇函数,则 $f(\tau)\cos\omega\tau$ 和 $f(\tau)\sin\omega\tau$ 分别是关于 τ 的奇函数和偶函数. 因此

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]\sin\omega t d\omega. \qquad (1.7)$$

当 $f(t)$为偶函数时,同理可得

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega t d\omega. \qquad (1.8)$$

它们分别称为 Fourier 正弦积分公式和 Fourier 余弦积分公式.

特别,如果 $f(t)$仅在$(0,+\infty)$上有定义,且满足 Fourier 积分存在定理的条件,我们可以采用类似于 Fourier 级数中的奇延拓或偶延拓的方法,得到 $f(t)$相应的 Fourier 正弦积分展开式或 Fourier 余弦积分展开式.

例 1 求函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1\\ 0, & 其它\end{cases}$ 的 Fourier 积分表达式.

解 根据 Fourier 积分公式的复数形式(1.4),有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau)d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}\cos\omega\tau d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t + j\sin\omega t)d\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega, \quad (t\neq\pm 1) \end{aligned}$$

当 $t=\pm 1$ 时,$f(t)$应以$\frac{f(\pm 1+0)+f(\pm 1-0)}{2}=\frac{1}{2}$代替.

我们也可以根据 Fourier 积分公式的三角形式(1.6)来计算. 事实上,这里 $f(t)$为偶函数,还可以根据 Fourier 余弦积分公式获得结果. 读者不妨计算和比较一下.

根据上述的结果,我们可以写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}f(t), & t\neq\pm 1,\\ \dfrac{1}{2}, & t=\pm 1.\end{cases}$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

据此也可看出，利用 $f(t)$ 的 Fourier 积分表达式可以推证一些广义积分的结果．这里，当 $t=0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2},$$

这就是著名的 Dirichlet 积分．

习 题 一

1．试证：若 $f(t)$ 满足 Fourier 积分定理条件，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega,$$

其中

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau.$$

2．求下列函数的 Fourier 积分：

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2<1,\\ 0, & t^2>1.\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-t}\sin 2t, & t\geqslant 0.\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1,\\ -1, & -1<t<0,\\ 1, & 0<t<1,\\ 0, & 1<t<+\infty.\end{cases}$

3．求下列函数的 Fourier 积分，并推证下列积分结果：

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta|t|}(\beta>0)$，证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2\beta}\mathrm{e}^{-\beta|t|}$.

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$，证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\cos t$.

(3) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi,\end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

4．求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t},(\beta>0,t\geqslant 0)$ 的 Fourier 正弦积分表达式和 Fourier 余弦积分表达式．

§1.2 Fourier 变换

1．Fourier 变换的概念

我们已经知道，若函数 $f(t)$ 满足 Fourier 积分定理中的条件，则在 $f(t)$ 的连续点处，便有(1.4)式，即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

成立．

从(1.4)式出发，设

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{1.10}$$

从上面两式可以看出，$f(t)$ 和 $F(\omega)$ 通过指定的积分运算可以相互表达．(1.9)式叫做 $f(t)$ 的 **Fourier 变换式**，可记为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)].$$

$F(\omega)$ 叫做 $f(t)$ 的**象函数**．(1.10)式叫做 $F(\omega)$ 的 **Fourier 逆变换式**，可记为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)].$$

$f(t)$叫做 $F(\omega)$的**象原函数**.

(1.9)式右端的积分运算,叫做取 $f(t)$的 Fourier 变换,同样,(1.10)式右端的积分运算,叫做取 $F(\omega)$的 Fourier 逆变换.可以说象函数 $F(\omega)$和象原函数 $f(t)$构成了一个 Fourier 变换对,它们有相同的奇偶性.

当 $f(t)$为奇函数时,从(1.7)式出发,则

$$F_s(\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t \tag{1.11}$$

叫做 $f(t)$的 Fourier 正弦变换式(简称为正弦变换),即

$$F_s(\omega)=\mathscr{F}_s[f(t)],$$

而

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega \tag{1.12}$$

叫做 $F(\omega)$的 Fourier 正弦逆变换式(简称为正弦逆变换),即

$$f(t)=\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)].$$

当 $f(t)$为偶函数时,从(1.8)式出发,则

$$F_c(\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t \tag{1.13}$$

叫做 $f(t)$的 Fourier 余弦变换式(简称为余弦变换),即

$$F_c(\omega)=\mathscr{F}_c[f(t)].$$

而

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega \tag{1.14}$$

叫做 $F(\omega)$的 Fourier 余弦逆变换式(简称为余弦逆变换),即

$$f(t)=\mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)].$$

例 1　求函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的 Fourier 变换及其积分表达式,其中 $\beta>0$.这个 $f(t)$叫做**指数衰减函数**,是工程技术中常碰到的一个函数.

解　根据(1.9)式,有

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}=\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

这便是指数衰减函数的 Fourier 变换.下面我们来求指数衰减函数的积分表达式.

根据(1.10)式,并利用奇偶函数的积分性质,可得

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

由此我们顺便得到一个含参量广义积分的结果:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0,\\ \pi\mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

例 2　求函数 $f(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t^2}$ 的 Fourier 变换及其积分表达式,其中 $A>0,\beta>0$.这个函数叫做**钟形脉冲函数**,也是工程技术中常碰到的一个函数.

解　根据(1.9)式,有

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t^2+\frac{\mathrm{j}\omega}{\beta}t\right)}\,\mathrm{d}t\\&=A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}\right)^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

如令 $t+\frac{j\omega}{2\beta}=s$，上式为一复变函数的积分，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\left(t+\frac{j\omega}{2\beta}\right)^2}dt=\int_{-\infty+\frac{j\omega}{2\beta}}^{+\infty+\frac{j\omega}{2\beta}} e^{-\beta s^2}ds.$$

由于 $e^{-\beta s^2}$ 为复平面 s 上的解析函数，取如图 1-3 所示的闭曲线 l：矩形 $ABCDA$，按 Cauchy 积分定理，有

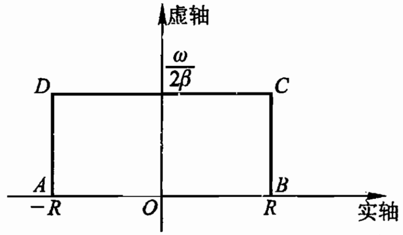


图 1-3

$$\oint_l e^{-\beta s^2}ds=0,$$

即

$$\left(\int_{l_{AB}}+\int_{l_{BC}}+\int_{l_{CD}}+\int_{l_{DA}}\right)e^{-\beta s^2}ds=0,$$

其中，当 $R\to+\infty$ 时，有

$$\int_{l_{AB}} e^{-\beta s^2}ds=\int_{-R}^{R}e^{-\beta t^2}dt\to\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}},①$$

$$\left|\int_{l_{BC}}e^{-\beta s^2}ds\right|=\left|\int_R^{R+\frac{j\omega}{2\beta}}e^{-\beta s^2}ds\right|$$

① 此积分结果可由概率积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ 推得．它的证明通过计算广义二重积分的方法能够获得．例如可参看南京工学院数学教研组编《高等数学》(下册)(高等教育出版社，1985年9月第二版)§9-4 广义二重积分．

$$=\left|\int_0^{\frac{\omega}{2\beta}} e^{-\beta(R+ju)^2}d(R+ju)\right|$$

$$\leqslant e^{-\beta R^2}\int_0^{\frac{\omega}{2\beta}}\left|e^{\beta u^2-2R\beta uj}\right|du=e^{-\beta R^2}\int_0^{\frac{\omega}{2\beta}}e^{\beta u^2}du\to0.$$

同理，当 $R\to+\infty$ 时，$\left|\int_{l_{DA}}e^{-\beta s^2}ds\right|\to0$．从而，当 $R\to+\infty$ 时，有

$$\int_{l_{BC}}e^{-\beta s^2}ds\to0,\int_{l_{DA}}e^{-\beta s^2}ds\to0.$$

由此可知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{l_{CD}}e^{-\beta s^2}ds+\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}=\lim_{R\to+\infty}\left[-\int_{l_{DC}}e^{-\beta s^2}ds\right]+\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}=0,$$

即

$$\int_{-\infty+\frac{j\omega}{2\beta}}^{+\infty+\frac{j\omega}{2\beta}}e^{-\beta s^2}ds=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

因此，钟形脉冲函数的 Fourier 变换为

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}.$$

下面我们来求钟形脉冲函数的积分表达式．根据(1.10)式，并利用奇偶函数的积分性质，可得

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega\\&=\frac{A}{\sqrt{\pi\beta}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,d\omega.\end{aligned}$$

由此还可得到一个含参量广义积分的结果：

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\sqrt{\pi\beta}}{A}f(t)=\sqrt{\pi\beta}e^{-\beta t^2}.$$

例 3 求函数 $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\0, & t\geqslant1\end{cases}$ 的正弦变换和余弦变换．

解　根据(1.11)式，$f(t)$的正弦变换为

$$F_s(\omega)=\mathscr{F}_s[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=\frac{1-\cos\omega}{\omega};$$

根据(1.13)式，$f(t)$的余弦变换为

$$F_c(\omega)=\mathscr{F}_c[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

可以发现，在半无限区间上的同一函数 $f(t)$，其正弦变换和余弦变换的结果是不同的.

2．单位脉冲函数及其 Fourier 变换

在物理和工程技术中，除了用到指数衰减函数以外，还常常会碰到单位脉冲函数. 因为有许多物理现象具有脉冲性质，如在电学中，要研究线性电路受具有脉冲性质的电势作用后所产生的电流；在力学中，要研究机械系统受冲击力作用后的运动情况等. 研究此类问题就会产生我们要介绍的单位脉冲函数.

在原来电流为零的电路中，某一瞬时(设为 $t=0$)进入一单位电量的脉冲，现在要确定电路上的电流 $i(t)$. 以 $q(t)$表示上述电路中到时刻 t 为止通过导体截面的电荷函数(即累积电量)，则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

由于电流强度是电荷函数对时间的变化率，即

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t},$$

所以，当 $t\neq 0$ 时，$i(t)=0$；当 $t=0$ 时，由于 $q(t)$是不连续的，从而在普通导数的意义下，$q(t)$在这一点导数不存在，如果我们形式地计算这个导数，则得

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}=\infty.$$

这就表明，在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够用来表示上述电路的电流强度，为了确定这种电路上的电流强度，必须引进一个新的函数，这个函数称为 **Dirac 函数**，简单地记成 δ－函数. 有了这种函数，对于许多集中于一点或一瞬时的量，例如点电荷、点热源、集中于一点的质量以及脉冲技术中的非常窄的脉冲等，就能够像处理连续分布的量那样，以统一的方式加以解决.

δ－函数是一个广义函数，它没有普通意义下的“函数值”，所以，它不能用通常意义下“值的对应关系”来定义. 在广义函数论中，δ－函数定义为某基本函数空间上的线性连续泛函，但要讲清楚这个定义，需要应用一些超出工科院校工程数学教学大纲范围的知识. 为了方便起见，我们仅把 δ－函数看作是弱收敛函数序列的弱极限①.

对于任何一个无穷次可微的函数 $f(t)$，如果满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)f(t)\,dt,\tag{1.15}$$

其中 $\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon;\\ 0, & t>\varepsilon,\end{cases}$ 则称 $\delta_\varepsilon(t)$的弱极限为 δ－函数. 记为 $\delta(t)$，即

$$\delta_\varepsilon(t)\underset{\varepsilon\to 0}{\overset{弱}{\Rightarrow}}\delta(t)，或简记为\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)=\delta(t).$$

---

① 严格说来，应是弱＊－收敛. 所谓函数序列$\{S_n(t)\}$弱收敛于函数 $S(t)$(或者说，$S(t)$为该序列的弱极限)，是指对于任何一个无穷次可微的函数 $f(t)$都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(t)f(t)\,dt=\int_a^b S(t)f(t)\,dt.$$

式中$[a,b]$亦可为$(-\infty,+\infty)$. 并记为 $S_n(t)\underset{n\to\infty}{\overset{弱}{\Rightarrow}}S(t)$. 上式中左、右两边的积分未必存在. 为保证积分存在，对 $S_n(t)$，$S(t)$要附加条件，如$\{S_n(t)\}$是可积的，当积分区间为$(-\infty,+\infty)$时，$S_n(t)$要局部可积(即在任何一个有限区间上可积)，$S(t)$在某一有限区间外等于 0.

此定义容易推广为　$S_\varepsilon(t)\underset{\varepsilon\to\varepsilon_0}{\overset{弱}{\Rightarrow}}S(t)$，其中 $\varepsilon,\varepsilon_0$ 为实数

这就表明，δ－函数可以看成一个普通函数序列①的弱极限.

① 这里的普通函数序列 $\delta_\varepsilon(t)$ 称为 δ－型序列. 除了 $\delta_\varepsilon(t)$ 以外，还可以找到其它的 δ－型序列. 下面我们给出普通函数序列成为 δ－型序列的一个充分条件，即 δ－型序列是指满足下列两个条件的局部可积的函数序列：

(i) 对于任意的 $M>0$，存在常数 C_M，使得对于一切 a,b,ε，当 $|a|\leqslant M$，$|b|\leqslant M$ 时，有 $\left|\int_b^a \delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant C_M$；

(ii) 对于任何两个固定的且为非零的 a,b，都有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, a<b<0 \text{ 及 } 0<a<b,\\ 1, a<0<b.\end{cases}$$

可以证明，

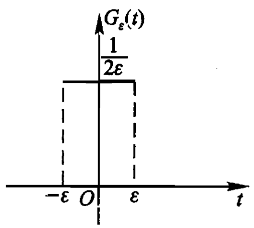
$$G_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & |t|>\varepsilon,\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |t|<\varepsilon,\end{cases} \quad H_\varepsilon(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}\quad(\varepsilon>0)\text{以及}$$

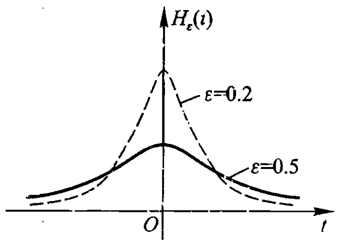
$$K_\omega(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega t}{t}\quad(\omega>0)$$

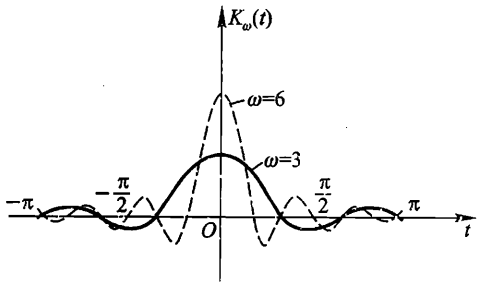
等均是 δ－型序列. 按照(1.15)式的意义，都可用来定义 δ－函数，即

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}G_\varepsilon(t),\ \delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2},\ \delta(t)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sin\omega t}{\pi t}.$$

$G_\varepsilon(t)$，$H_\varepsilon(t)$，$K_\omega(t)$ 的图形如下列各图所示







$\delta_\varepsilon(t)$ 的图形如图 1－4 所示. 对任何 $\varepsilon>0$，显然有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t=\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}t=1.$$

按(1.15)式给出的 δ－函数定义，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1.$$

工程上，常将 δ－函数称为**单位脉冲函数**. 有一些工程书上，将 δ－函数用一个长度等于 1 的有向线段来表示(见图 1－5). 这个线段的长度表示 δ－函数的积分值，称为 δ－函数的**强度**.

由(1.15)式给出的 δ－函数的定义，可以推出 δ－函数的一个重要结果，称为 δ－函数的**筛选性质**：

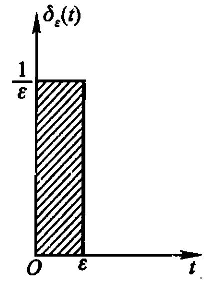


图 1－4

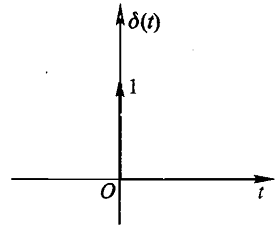


图 1－5

若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0).\qquad(1.16)$$

事实上，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)f(t)\mathrm{d}t$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\mathrm{d}t,$$

由于 $f(t)$ 是无穷次可微函数，显然 $f(t)$ 是连续函数，按积分中值定理，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}f(\theta\varepsilon) \quad (0<\theta<1),$$

所以，
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0).$$

更一般地还成立着

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = f(t_0). \tag{1.17}$$

由 δ－函数的筛选性质可知，对于任何一个无穷次可微函数 $f(t)$都对应着一个确定的数 $f(0)$或 $f(t_0)$这一性质使得 δ－函数在近代物理和工程技术中有着较广泛的应用.

δ－函数除了重要的筛选性质外，还有一些性质也不难得到：

1° δ－函数是偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$；

2° $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \delta(t)$，

其中 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0\end{cases}$ 称为单位阶跃函数；

3° 若 $f(t)$为无穷次可微的函数，则有①

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\mathrm{d}t = -f'(0),$$

一般地，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

它们的证明放在习题中.

根据(1.16)式，我们可以很方便地求出 δ－函数的 Fourier 变换：

① 有些书中以此性质作为 δ－函数的导数定义，即若某一函数与任何一个无穷次可微函数 $f(t)$的乘积在$(-\infty,+\infty)$上的积分值为 $-f'(0)$，则称该函数为 δ－函数的导数，即 $\delta'(t)$. 事实上，δ－函数是无穷次可微的广义函数，它的各阶导数 $\delta^{(n)}(t)(n=1,2,\cdots)$也都是广义函数，利用 δ－型序列的弱极限可以推得 δ－函数的各阶导数. 限于篇幅，这里从略.

$$F(\omega) = \mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=0} = 1.$$

可见，单位脉冲函数 $\delta(t)$与常数 1 构成了一个 Fourier 变换对. 同理，$\delta(t-t_0)$和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$ 亦构成了一个 Fourier 变换对.

需要指出的是，这里为了方便起见，我们将 $\delta(t)$的 Fourier 变换仍旧写成古典定义的形式，所不同的是，此处广义积分是按(1.15)式来定义的，而不是普通意义下的积分值. 所以，$\delta(t)$的 Fourier 变换是一种广义 Fourier 变换. 这一点对后面的几个例子亦是如此.

在物理学和工程技术中，有许多重要函数不满足 Fourier 积分定理中的绝对可积条件，即不满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t < \infty.$$

例如常数、符号函数、单位阶跃函数以及正、余弦函数等，然而它们的广义 Fourier 变换也是存在的，利用单位脉冲函数及其 Fourier 变换就可以求出它们的 Fourier 变换. 所谓广义是相对于古典意义而言的，在广义意义下，同样可以说，象函数 $F(\omega)$和象原函数 $f(t)$亦构成一个 Fourier 变换对. 为了不涉及到 δ－函数的较深入的理论，我们可以通过 Fourier 逆变换来推证单位阶跃函数的 Fourier 变换.

例 4 证明单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0\end{cases}$ 的 Fourier 变换为 $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$.

证 事实上，若 $F(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$，则按 Fourier 逆变换可得

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega.$$

为了说明 $f(t)=u(t)$，就必须计算积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega$. 因为我们已经知道 Dirichlet 积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin \omega}{\omega}d\omega = \frac{\pi}{2}$. 因此，有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & t<0, \\ 0, & t=0, \\ \frac{\pi}{2}, & t>0, \end{cases}$$

其中，当 $t=0$ 时，结果是显然的；当 $t<0$ 时，可令 $u=-t\omega$，则

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega = \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(-u)}{u}du = -\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = -\frac{\pi}{2}.$$

将此结果代入 $f(t)$ 的表达式中，当 $t\neq 0$ 时，可得

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0, & t<0, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1, & t>0. \end{cases}$$

这就表明 $\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ 的 Fourier 逆变换为 $f(t)=u(t)$. 因此，$u(t)$ 和 $\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ 构成了一个 Fourier 变换对，所以，单位阶跃函数 $u(t)$ 的积分表达式在 $t\neq 0$ 时，可写为

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega.$$

同样，若 $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ 时，则由 Fourier 逆变换可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = 1.$$

所以，1 和 $2\pi\delta(\omega)$ 也构成了一个 Fourier 变换对. 同理，$e^{j\omega_0 t}$ 和 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 也构成了一个 Fourier 变换对. 由此可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt = 2\pi\delta(\omega), \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = 2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

显然，这两个积分在普通意义下都是不存在的，这里积分的意义仍是按(1.15)式来定义的.

例 5　求正弦函数 $f(t)=\sin \omega_0 t$ 的 Fourier 变换.

解　根据 Fourier 变换公式，有

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}\sin \omega_0 t\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}e^{-j\omega t}dt$$
$$= \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{-j(\omega-\omega_0)t}-e^{-j(\omega+\omega_0)t}]dt$$
$$= \frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$
$$= j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)].$$

通过上述的讨论，我们可以看出引进 δ－函数的重要性. 它使得在普通意义下的一些不存在的积分，有了确定的数值；而且利用 δ－函数及其 Fourier 变换可以很方便地得到工程技术上许多重要函数的 Fourier 变换；并且使得许多变换的推导大大地简化. 因此，本书介绍 δ－函数的目的主要是为了提供一个有用的数学工具，而不去追求它在数学上的严谨叙述或证明. 对 δ－函数理论的详尽内容有兴趣的读者可阅读有关的参考书.

3. 非周期函数的频谱

Fourier 变换和频谱概念有着非常密切的关系. 随着无线电技术、声学、振动学的蓬勃发展，频谱理论也相应地得到了发展，它的应用也越来越广泛. 我们这里只能简单地介绍一下频谱的基本概念，至于它的进一步理论和应用，留待有关专业课程再作详细的讨论.

在 Fourier 级数的理论中，我们已经知道，对于以 T 为周期的

非正弦函数 $f_T(t)$，它的第 n 次谐波 $\left(\omega_n = n\omega = \dfrac{2n\pi}{T}\right)$

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

的振幅为

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

而在复指数形式中，第 n 次谐波为

$$c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{-j\omega_n t},$$

其中

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2},$$

并且

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

所以，以 T 为周期的非正弦函数 $f_T(t)$ 的第 n 次谐波的振幅为

$$A_n = 2|c_n| \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况. 所谓频谱图，通常是指频率和振幅的关系图，所以 A_n 称为 $f_T(t)$ 的振幅频谱(简称为频谱). 由于 $n = 0,1,2,\cdots$，所以频谱 A_n 的图形是不连续的，称之为离散频谱. 它清楚地表明了一个非正弦周期函数包含了哪些频率分量及各分量所占的比重(如振幅的大小). 因此频谱图在工程技术中应用比较广泛. 例如，图 1-6 所示的周期性矩形脉冲，在一个周期 T 内的表达式为

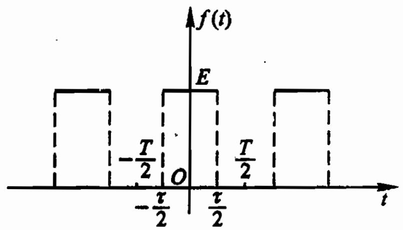


图 1-6

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & -\dfrac{T}{2} \leqslant t < -\dfrac{\tau}{2}, \\ E, & -\dfrac{\tau}{2} \leqslant t < \dfrac{\tau}{2}, \\ 0, & \dfrac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

它的 Fourier 级数的复指数形式为

$$f_T(t) = \frac{E\tau}{T} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{+\infty} \frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T} e^{jn\omega t},$$

可见 $f_T(t)$ 的 Fourier 系数为

$$c_0 = \frac{E\tau}{T}, c_n = \frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

它的频谱为

$$A_0 = 2|c_0| = \frac{2E\tau}{T},$$

$$A_n = 2|c_n| = \frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi\tau}{T}\right| \quad (n = 1,2,\cdots).$$

如 $T = 4\tau$ 时，有

$$A_0 = \frac{E}{2}, A_n = \frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|, \omega_n = n\omega = \frac{n\pi}{2\tau} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

这样，我们把计算出来的各次谐波振幅的数值，在频谱图中直观地表示出来，如图 1-7 所示.

对于非周期函数 $f(t)$，当它满足 Fourier 积分定理中的条件时，则在 $f(t)$ 的连续点处可表示为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

其中

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

为它的 Fourier 变换. 在频谱分析中，Fourier 变换 $F(\omega)$ 又称为 $f(t)$ 的频谱函数，而频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱

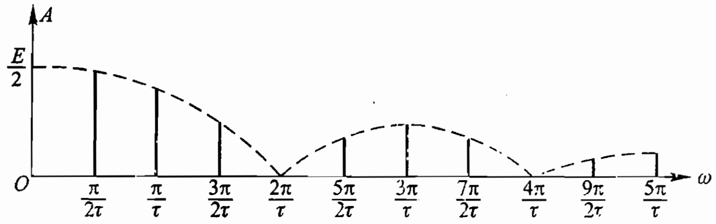


图 1-7

(亦简称为频谱). 由于 ω 是连续变化的, 我们称之为连续频谱. 对一个时间函数作 Fourier 变换, 就是求这个时间函数的频谱函数.

例 6 作图 1-8 中所示的单个矩形脉冲的频谱图.

解 根据上面的讨论, 单个矩形脉冲的频谱函数为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}.$$

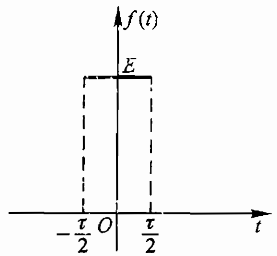


图 1-8

再根据振幅频谱 $|F(\omega)|=2E\left|\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\right|$, 可作出频谱图, 如图 1-9 所示(其中只画出 $\omega\geqslant 0$ 这一半).

此外, 振幅频谱 $|F(\omega)|$ 是频率 ω 的偶函数, 即

$$|F(\omega)|=|F(-\omega)|.$$

事实上, $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t,$$

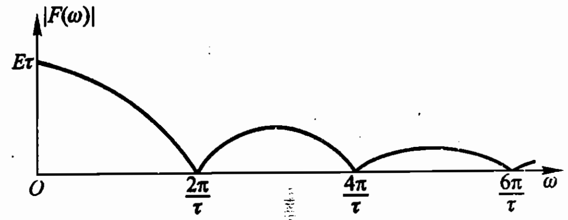


图 1-9

所以 $|F(\omega)|=\sqrt{\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right)^2+\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right)^2}$

显然有 $$|F(\omega)|=|F(-\omega)|.$$

我们定义 $\varphi(\omega)=\arctan\dfrac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}$ 为 $f(t)$ 的相角频谱. 显然, 相角频谱 $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数, 即 $\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$, 在这里就不详细讨论了.

例 7 作指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ $(\beta>0)$ 的频谱图.

解 根据(1.9)式和例 1 的结果, 可得

$$F(\omega)=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega},$$

所以 $$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}},$$

频谱图形如图 1-10 所示.

例 8 作单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的频谱图.

解 根据(1.16)式, 有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=1.$$

它们的图形表示在图 1-11 中.

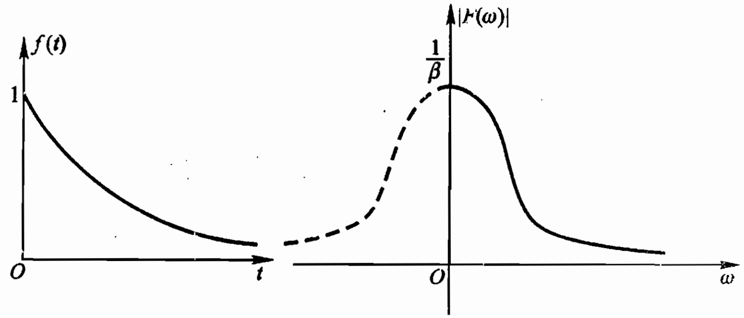


图 1－10

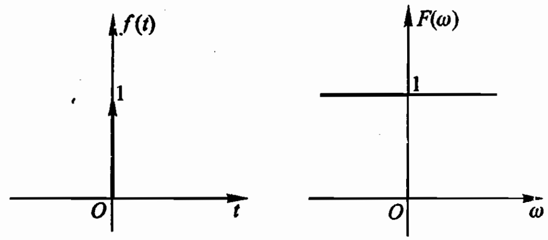


图 1－11

同样，当 $f(t)=\delta(t-t_0)$时，$F(\omega)=e^{-j\omega t_0}$. 而 $f(t)$的振幅频谱为

$$|F(\omega)|=1.$$

当 $f(t)=1$ 时，$F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$.
它们的图形分别表示在图 1－12 和图 1－13 中。

在物理学和工程技术中，将会出现很多非周期函数，它们的频谱求法，这里不可能一一列举. 我们将经常遇到的一些函数及其 Fourier 变换(或频谱)列于附录Ⅰ中，以备读者查用.

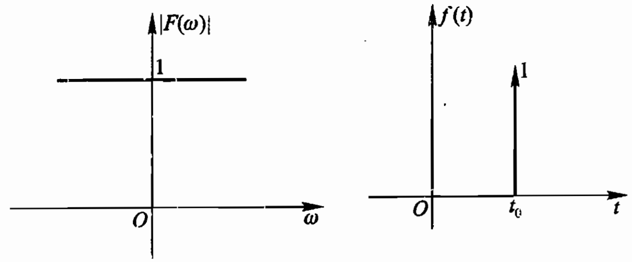


图 1－12

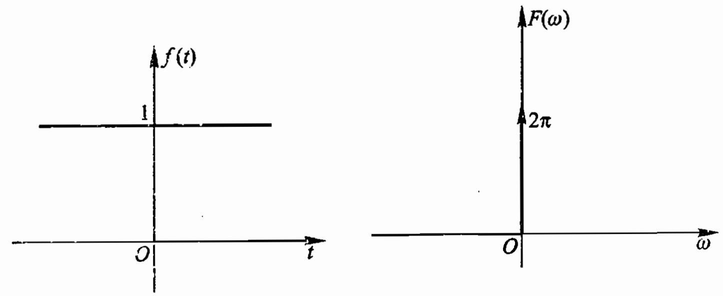


图 1－13

习 题 二

1. 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}A, & 0\leqslant t\leqslant\tau;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

2. 设 $F(\omega)$是函数 $f(t)$的 Fourier 变换，证明 $F(\omega)$与 $f(t)$有相同的奇偶性.

3. 求下列函数的 Fourier 变换，并推证下列积分结果：

(1) $f(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\beta t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\pi e^{-\beta t}, & t>0;\\ \frac{\pi}{2}, & t=0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

(2) $f(t)=\begin{cases}\cos t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega\pi\cos\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

4. 求函数 $f(t)=e^{-t}(t\geqslant 0)$ 的 Fourier 正弦变换，并推证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin a\omega}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}e^{-a},\qquad (a>0).$$

5. 设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，试证明

(1) $f(t)$ 为实值函数的充要条件是 $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$；

(2) $f(t)$ 为纯虚值函数的充要条件是 $F(-\omega)=-\overline{F(\omega)}$，

其中 $\overline{F(\omega)}$ 为 $F(\omega)$ 的共轭函数.

6. 已知某函数的 Fourier 变换为 $F(\omega)=\dfrac{\sin\omega}{\omega}$，求该函数 $f(t)$.

7. 已知某函数的 Fourier 变换为 $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$，求该函数 $f(t)$.

8. 求符号函数(又称正负号函数) $\operatorname{sgn} t=\dfrac{t}{|t|}=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 1, & t>0\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

9. 求函数 $f(t)=\dfrac{1}{2}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta\left(t+\dfrac{a}{2}\right)+\delta\left(t-\dfrac{a}{2}\right)\right]$ 的 Fourier 变换.

10. 求函数 $f(t)=\cos t\sin t$ 的 Fourier 变换.

11. 求函数 $f(t)=\sin^3 t$ 的 Fourier 变换.

12. 求函数 $f(t)=\sin\left(5t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的 Fourier 变换.

13. 证明 $\delta-$ 函数的下列性质：

(1) $\delta-$ 函数是偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$；

(2) $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t)$，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数；

(3) 若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\mathrm{d}t=-f'(0).$$

14. 证明：若 $\mathscr{F}[e^{j\varphi(t)}]=F(\omega)$，其中 $\varphi(t)$ 为一实函数，则

$$\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}],$$

$$\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2j}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}],$$

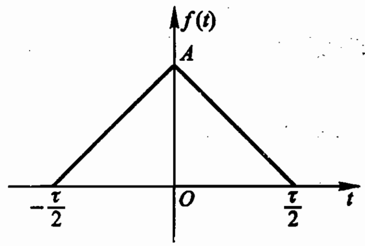
其中 $\overline{F(-\omega)}$ 为 $F(-\omega)$ 的共轭函数.

15. 证明周期为 T 的非正弦函数 $f_T(t)$ 的频谱函数为

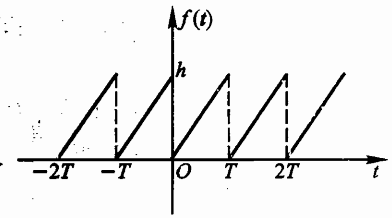
$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0),$$

其中 c_n 为 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数展式中的系数.

16. 求如图所示的三角形脉冲的频谱函数.



(第 16 题)



(第 17 题)

17. 求作如图所示的锯齿形波的频谱图.

18. 求 Gauss 分布函数

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

的频谱函数.

§1.3 Fourier 变换的性质

这一节，我们将介绍 Fourier 变换的几个重要性质. 为了叙述方便起见，假定在这些性质中，凡是需要求 Fourier 变换的函数都满足 Fourier 积分定理中的条件. 在证明这些性质时，不再重述这些条件，希望读者注意.

1. 线性性质

设 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，$\alpha,\beta$ 是常数，则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega). \tag{1.18}$$

这个性质的作用是很显然的，它表明了函数线性组合的 Fourier 变换等于各函数 Fourier 变换的线性组合. 它的证明只需根据定义就可推出.

同样，Fourier 逆变换亦具有类似的线性性质，即

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t). \tag{1.19}$$

2. 位移性质

$$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm j\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.20}$$

它表明时间函数 $f(t)$ 沿 t 轴向左或向右位移 t_0 的 Fourier 变换等于 $f(t)$ 的 Fourier 变换乘以因子 $e^{j\omega t_0}$ 或 $e^{-j\omega t_0}$.

证 由 Fourier 变换的定义，可知

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t\pm t_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\pm t_0)e^{-j\omega t}\,dt \\ (\text{令 } t\pm t_0=u) \quad &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\omega(u\mp t_0)}\,du \\ &= e^{\pm j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\omega u}\,du \\ &= e^{\pm j\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)].\end{aligned}$$

同样，Fourier 逆变换亦具有类似的位移性质，即

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=f(t)e^{\pm j\omega_0 t}. \tag{1.21}$$

它表明频谱函数 $F(\omega)$ 沿 ω 轴向右或向左位移 ω_0 的 Fourier 逆变换等于原来的函数 $f(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$ 或 $e^{-j\omega_0 t}$.

例 1 求矩形单脉冲 $f(t)=\begin{cases}E, 0<t<\tau;\\ 0, \text{其他}\end{cases}$ 的频谱函数.

解 根据 Fourier 变换的定义，有

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^{\tau} Ee^{-j\omega t}\,dt \\ &= -\frac{E}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^{\tau} = \frac{E}{j\omega}e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\left(e^{j\frac{\omega\tau}{2}}-e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\right) \\ &= \frac{2E}{\omega}e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\sin\frac{\omega\tau}{2}.\end{aligned}$$

如果我们根据 §1.2 例 6 介绍的矩形单脉冲

$$f_1(t)=\begin{cases}E, & -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2};\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的频谱函数

$$F_1(\omega)=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2},$$

利用位移性质，就可以很方便地得到上述 $F(\omega)$. 因为 $f(t)$ 可以由 $f_1(t)$ 在时间轴上向右平移 $\frac{\tau}{2}$ 得到，所以

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}\left[f_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}F_1(\omega) \\ &= \frac{2E}{\omega}e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\sin\frac{\omega\tau}{2}.\end{aligned}$$

且

$$|F(\omega)|=|F_1(\omega)|=\frac{2E}{\omega}\left|\sin\frac{\omega\tau}{2}\right|.$$

两种解法的结果一致，它们的频谱如图 1-9 所示.

3. 微分性质

如果 $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续或只有有限个可去间断点，且当$|t|\to+\infty$时，$f(t)\to 0$，则

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{j}\omega\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.22}$$

证 由 Fourier 变换的定义，并利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mathrm{j}\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &=\mathrm{j}\omega\mathscr{F}[f(t)].\end{aligned}$$

它表明一个函数的导数的 Fourier 变换等于这个函数的 Fourier 变换乘以因子 $\mathrm{j}\omega$.

推论 若 $f^{(k)}(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0, k=0,1,2,\cdots,n-1$[①]，则有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^n\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.23}$$

同样，我们还能得到象函数的导数公式．设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\mathscr{F}[-\mathrm{j}tf(t)].$$

一般地，有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}F(\omega)=(-\mathrm{j})^n\mathscr{F}[t^n f(t)].$$

在实际中，常常用象函数的导数公式来计算 $\mathscr{F}[t^n f(t)]$.

例 2 已知函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}(\beta>0)$，试求 $\mathscr{F}[tf(t)]$及 $\mathscr{F}[t^2 f(t)]$.

解 根据 §1.2 的例 1 知

① 为证明简单起见，这里附加了条件

$$\lim_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0, k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

事实上，满足 Fourier 积分定理条件的函数 $f^{(k)}(t), k=0,1,2,\cdots,n$，其附加条件必成立.

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}.$$

利用象函数的导数公式，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[tf(t)]&=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)\\&=\frac{1}{(\beta+\mathrm{j}\omega)^2},\\ \mathscr{F}[t^2 f(t)]&=\mathrm{j}^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}F(\omega)\\&=\frac{2}{(\beta+\mathrm{j}\omega)^3}.\end{aligned}$$

4. 积分性质

如果当 $t\to+\infty$时，$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\to 0$[①]，

则
$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathscr{F}[f(t)]. \tag{1.24}$$

证 因为
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t = f(t),$$

所以
$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\mathscr{F}[f(t)],$$

又根据上述微分性质：

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\mathrm{j}\omega\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right],$$

故

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathscr{F}[f(t)].$$

它表明一个函数积分后的 Fourier 变换等于这个函数的 Fourier 变换除以因子 $\mathrm{j}\omega$.

① 当 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)\neq 0$ 时，积分性质应为

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega),$$

其中 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$. 它的证明放在 § 1.4 的末尾.

运用 Fourier 变换的线性性质、微分性质以及积分性质,可以将线性常系数微分方程(包括积分方程和微积分方程)转化为代数方程,通过解代数方程与求 Fourier 逆变换,就可以得到相应的原方程的解.另外,Fourier 变换还是求解偏微分方程的方法之一,其计算过程与上述步骤大体相似,这些内容我们将在 §1.5Fourier 变换的应用中加以讨论.

5.* 乘积定理

若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$,$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$,则

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}f_2(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\overline{f_2(t)}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega\end{aligned}\right\}\tag{1.25}$$

其中$\overline{f_1(t)}$,$\overline{f_2(t)}$,$\overline{F_1(\omega)}$及$\overline{F_2(\omega)}$分别为 $f_1(t)$,$f_2(t)$,$F_1(\omega)$ 及 $F_2(\omega)$的共轭函数.

证

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}f_2(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}e^{j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega^{①}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)e^{-j\omega t}}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

同理可得

① 我们在这里假定,$F_1(\omega)$或 $F_2(\omega)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,因此能够证明积分次序可以交换.今后遇到类似问题时,我们不再说明.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\overline{f_2(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega$$

若 $f_1(t)$,$f_2(t)$为实函数,则乘积定理的结论可写为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega\end{aligned}\tag{1.26}$$

该性质的结论与证明本身并非特别重要,但由它引出的能量积分(或称 Parseval 等式)无论在理论上还是在应用上都是十分重要的.

6.* 能量积分

若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega,\tag{1.27}$$

这一等式又称为 Parseval 等式.

证 在(1.26)式中,令 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$,则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\overline{F(\omega)}\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

其中

$$S(\omega)=|F(\omega)|^2$$

称为能量密度函数(或称能量谱密度).它可以决定函数 $f(t)$的能量分布规律.将它对所有频率积分就得到 $f(t)$的总能量

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t.$$

故 Parseval 等式又称为能量积分.显然,能量密度函数 $S(\omega)$是 ω 的偶函数.即

$$S(\omega)=S(-\omega).$$

利用能量积分还可以计算某些积分的数值.

例 3　求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解　根据 Parseval 等式 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$ 可知，若设

$$f(t)=\frac{\sin t}{t},$$

则它的 Fourier 变换可按附录 I 中第 5 式，得到

$$F(\omega)=\begin{cases}\pi,|\omega|<1;\\0,\text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\mathrm{d}\omega=\pi.$$

若设 $F(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}$，则由 §1.2 的例 6 可知

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2},|t|<1;\\0,\text{其他}.\end{cases}$$

所以，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}t=\pi.$$

由此可知，当此类积分的被积函数为 $[\varphi(x)]^2$ 时，取 $\varphi(x)$ 为象原函数或象函数都可以求得积分的结果.

习　题　三

1. 若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，$\alpha,\beta$ 是常数，证明(线性性质)：

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega),$$
$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

2. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明(对称性质)：

$$f(\pm\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mp t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,$$

即
$$\mathscr{F}[F(\mp t)]=2\pi f(\pm\omega).$$

3. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$a$ 为非零常数，证明(相似性质)：

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

4. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明(象函数的位移性质)：

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}f(t),$$

即
$$F(\omega\mp\omega_0)=\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}f(t)].$$

5. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明(象函数的微分性质)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\mathscr{F}[-\mathrm{j}tf(t)].$$

6. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明(翻转性质)：

$$F(-\omega)=\mathscr{F}[f(-t)].$$

7. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明：

$$\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)],$$

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)].$$

8. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$a$ 为非零常数，试证明：

(1) $\mathscr{F}[f(at-t_0)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}t_0}$.

(2) $\mathscr{F}[f(t_0-at)]=\frac{1}{|a|}F\left(-\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}t_0}$.

9. 设函数 $f(t)=\begin{cases}1,|t|<1,\\0,|t|>1,\end{cases}$ 利用对称性质，证明

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\begin{cases}\pi,|\omega|<1;\\0,|\omega|>1.\end{cases}$$

10. 利用象函数的微分性质，求 $f(t)=t\mathrm{e}^{-t^2}$ 的 Fourier 变换.

11. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，利用 Fourier 变换的性质求下列函数 $g(t)$ 的 Fourier 变换：

(1) $g(t)=tf(2t)$；　(2) $g(t)=(t-2)f(t)$；

(3) $g(t)=(t-2)f(-2t)$；　(4) $g(t)=t^3f(2t)$；

(5) $g(t)=tf'(t)$; (6) $g(t)=f(1-t)$;

(7) $g(t)=(1-t)f(1-t)$; (8) $g(t)=f(2t-5)$.

12. 利用能量积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$,求下列积分的值:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

§1.4 卷积与相关函数

上一节我们介绍了关于 Fourier 变换的一些重要性质,本节还要介绍 Fourier 变换的另一类重要性质,它们都是分析线性系统的极为有用的工具.

1. 卷积定理

(1) 卷积的概念

若已知函数 $f_1(t),f_2(t)$,则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的**卷积**,记为 $f_1(t)*f_2(t)$,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f_1(t)*f_2(t). \qquad (1.28)$$

显然 $$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t),$$

即卷积满足交换律.

对卷积,如下的不等式

$$|f_1(t)*f_2(t)|\leqslant|f_1(t)|*|f_2(t)|$$

成立,即函数卷积的绝对值小于等于函数绝对值的卷积.

例 1 证明

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

证 根据卷积的定义

$$\begin{aligned}f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)[f_2(t-\tau)+f_3(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t),\end{aligned}$$

即卷积也满足对加法的分配律.

例 2 若 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\1, & t\geqslant0,\end{cases}$ $f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\\mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant0.\end{cases}$

求 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积.

解 按卷积的定义,有

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

我们可以用图 1-14(a)和(b)来表示 $f_1(\tau)$ 和 $f_2(t-\tau)$ 的图形,当 $t<0$ 时,$f_1(\tau)f_2(t-\tau)=0$;而 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq0$ 的区间从图 1-14 中可以看出,在 $t\geqslant0$ 时,为$[0,t]$.所以

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\begin{cases}0, & t<0;\\\int_0^t1\cdot\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, & t\geqslant0\end{cases}=\begin{cases}0, & t<0;\\1-\mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant0.\end{cases}\end{aligned}$$

同样,$f_2(t)*f_1(t)$ 亦得到上述的结果,读者可自己演算一下.

为确定 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq0$ 的区间,还可以用解不等式组的

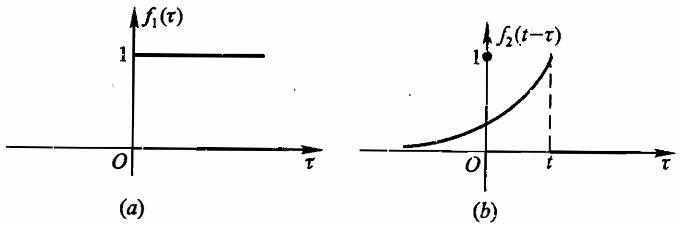


图 1-14

方法加以解决.仍以本例来说,要 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq 0$,即要求

$$\begin{cases}\tau\geqslant 0,\\ t-\tau\geqslant 0\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}\tau\geqslant 0,\\ \tau\leqslant t\end{cases}$$

成立.可见,当 $t\geqslant 0$ 时,$f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq 0$ 的区间为 $[0,t]$,故

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t 1\cdot \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^{-t}.$$

卷积在 Fourier 分析的应用中,有着十分重要的作用,这是由下面的卷积定理所决定的.

(2) 卷积定理

假定 $f_1(t),f_2(t)$ 都满足 Fourier 积分定理中的条件,且 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$,$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$,则

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega),\\ 或\quad &\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t).\end{aligned}\right\}\tag{1.29}$$

证 按 Fourier 变换的定义,有

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$

$$=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega).$$

这个性质表明,两个函数卷积的 Fourier 变换等于这两个函数 Fourier 变换的乘积.

同理可得

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega),\tag{1.30}$$

即两个函数乘积的 Fourier 变换等于这两个函数 Fourier 变换的卷积除以 2π.

不难推证,若 $f_k(t)$ 满足 Fourier 积分定理中的条件,且 $\mathscr{F}[f_k(t)]=F_k(\omega)\quad(k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)\cdot\cdots\cdot F_n(\omega)$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot\cdots\cdot f_n(t)]=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}F_1(\omega)*F_2(\omega)*\cdots*F_n(\omega).$$

从上面我们可以看出,卷积并不总是很容易计算的,但卷积定理提供了卷积计算的简便方法,即化卷积运算为乘积运算.这就使得卷积在线性系统分析中成为特别有用的方法.

2.* 相关函数

相关函数的概念和卷积的概念一样,也是频谱分析中的一个重要概念.本节在引入相关函数的概念以后,主要是来建立相关函数和能量谱密度之间的关系.

(1) 相关函数的概念

对于两个不同的函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$,则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)\mathrm{d}t$$

称为两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的**互相关函数**,用记号 $R_{12}(\tau)$ 表示,即

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)\mathrm{d}t,\tag{1.31}$$

而积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)\mathrm{d}t$$

记为 $R_{21}(\tau)$，即

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)\mathrm{d}t. \tag{1.32}$$

当 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$时，则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t$$

称为函数 $f(t)$的**自相关函数(简称相关函数)**. 用记号 $R(\tau)$表示，即

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t. \tag{1.33}$$

根据 $R(\tau)$的定义，可以看出：自相关函数是一个偶函数，即

$$R(-\tau)=R(\tau).$$

事实上，$R(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-\tau)\mathrm{d}t$，令 $t = u+\tau$，可得

$$R(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+\tau)f(u)\mathrm{d}u = R(\tau)$$

关于互相关函数，有如下的性质：

$$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau).$$

(2) 相关函数和能量谱密度的关系

在(1.26)式中，令 $f_1(t)=f(t)$，$f_2(t)=f(t+\tau)$且

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)],$$

再根据位移性质，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\omega)}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega,$$

即

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.$$

由能量谱密度的定义可以推得

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau.$$

由此可见，自相关函数 $R(\tau)$和能量谱密度 $S(\omega)$构成了一个 Fourier 变换对：

$$\left.\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega, \\ S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega. \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

利用相关函数 $R(\tau)$及 $S(\omega)$的偶函数性质，可将(1.34)式写成三角函数的形式

$$\left.\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\omega, \\ S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

当 $\tau=0$ 时，

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

即 Parseval 等式.

若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，根据乘积定理，可得

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.$$

我们称 $S_{12}(\omega)=\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)$为**互能量谱密度**. 同样可见，它和互相关函数亦构成一个 Fourier 变换对：

$$\left.\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega, \\ S_{12}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

我们还可以发现，互能量谱密度有如下的性质：

$$S_{21}(\omega)=\overline{S_{12}(\omega)},$$

这里，$S_{21}(\omega)=F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}$.

例 3　求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ $(\beta>0)$ 的自相关函数和能量谱密度.

解　根据自相关函数的定义，有

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t.$$

我们可以用图 1－15(a)、(b)和(c)来表示 $f(t)$ 和 $f(t+\tau)$ 的图形，而它们乘积 $f(t)f(t+\tau)\neq 0$ 的区间从图 1－15 中可以看出：

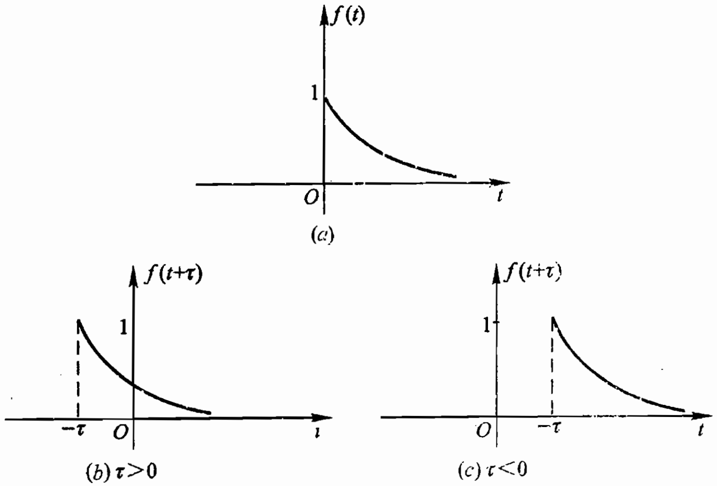


图 1－15

当 $\tau\geqslant 0$ 时，积分区间为$[0,+\infty)$，所以

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-\beta(t+\tau)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{e^{-\beta\tau}}{-2\beta}e^{-2\beta t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{e^{-\beta\tau}}{2\beta},$$

当 $\tau<0$ 时，积分区间为$[-\tau,+\infty)$，所以

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\tau}^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-\beta(t+\tau)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{e^{-\beta\tau}}{-2\beta}e^{-2\beta t}\Big|_{-\tau}^{+\infty}=\frac{e^{\beta\tau}}{2\beta},$$

可见，当 $-\infty<\tau<+\infty$ 时，自相关函数可合写为

$$R(\tau)=\frac{1}{2\beta}e^{-\beta|\tau|}.$$

将求得的 $R(\tau)$ 代入(1.34)式，即得能量谱密度为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\beta}e^{-\beta|\tau|}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$=\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}=\frac{1}{\beta^2+\omega^2}.$$

为确定 $f(t)f(t+\tau)\neq 0$ 的区间，也可以用解不等式组的方法加以解决. 由函数 $f(t)$ 求相关函数 $R(\tau)$，要决定积分的上、下限，有时为了避免这种麻烦，可以先求出 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$，再根据

$$S(\omega)=|F(\omega)|^2,R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

求得结果，读者不妨就这个例题自己验算一下.

最后还要指出，本节和上一节介绍的是古典意义下的 Fourier 变换的一些性质. 对于广义 Fourier 变换来说，除了像函数的积分性质的结果稍有不同以外，其他性质在形式上也都相同，但不同的是变换中的广义积分是按(1.15)式来决定的，而不是普通意义下的积分值.

例 4　利用 Fourier 变换的性质，求 $\delta(t-t_0)$，$e^{j\omega_0 t}$ 以及 $tu(t)$ 的 Fourier 变换.

解　因为 $\mathscr{F}[\delta(t)]=1$. 按位移性质可知

$$\mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathscr{F}[\delta(t)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}.$$

又因为 $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$，按象函数的位移性质可知

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

可见，这和前面得到的结果是完全一致的.

由 $\mathscr{F}[u(t)]=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$，按象函数的微分性质 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\mathscr{F}[-\mathrm{j}tf(t)]$ 可知

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[tu(t)]&=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathscr{F}[u(t)]\\&=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\\&=\mathrm{j}\left[\frac{-1}{\mathrm{j}\omega^2}+\pi\delta'(\omega)\right]\\&=-\frac{1}{\omega^2}+\mathrm{j}\pi\delta'(\omega).\end{aligned}$$

例 5 若 $f(t)=\cos\omega_0 t\cdot u(t)$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 根据(1.30)式，有

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t\cdot u(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]*\mathscr{F}[u(t)].$$

而
$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)],$$

$$\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega).$$

例 1 的结论对广义函数的卷积来说形式上也相同，所以

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)]&=\frac{1}{2\pi}[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)]*\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\\&=\frac{1}{2}\Big[\delta(\omega-\omega_0)*\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\delta(\omega+\omega_0)*\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\\&\quad+\delta(\omega-\omega_0)*\pi\delta(\omega)+\delta(\omega+\omega_0)*\pi\delta(\omega)\Big].\end{aligned}$$

根据卷积定理(1.29)式，有

$$\begin{aligned}\delta(\omega\pm\omega_0)*\frac{1}{\mathrm{j}\omega}&=\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}[\delta(\omega\pm\omega_0)]\cdot\mathscr{F}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\right\}\\&=\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}\cdot\mathscr{F}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\right\}\\&=\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}\left[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega\pm\omega_0)}\right]\right\}=\frac{1}{\mathrm{j}(\omega\pm\omega_0)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(\omega\pm\omega_0)*\pi\delta(\omega)&=\pi[\delta(\omega\pm\omega_0)*\delta(\omega)]\\&=\pi\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}[\delta(\omega\pm\omega_0)]\cdot\mathscr{F}[\delta(\omega)]\}\\&=\pi\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}[\delta(\omega\pm\omega_0)]\}=\pi\delta(\omega\pm\omega_0).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)]&=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\\&\quad+\pi\delta(\omega+\omega_0)\Big]=\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\end{aligned}$$

例 6 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).\qquad(1.37)$$

证 由前面介绍的积分性质知道，当 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t$ 满足 Fourier 积分定理的条件时，有

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}.$$

当 $g(t)$ 为一般情况时，我们可以将 $g(t)$ 表示成 $f(t)$ 和 $u(t)$ 的卷积，即

$$g(t)=f(t)*u(t).$$

这是因为

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

利用卷积定理(1.29)式，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[g(t)]&=\mathscr{F}[f(t)*u(t)]=\mathscr{F}[f(t)]\cdot\mathscr{F}[u(t)]\\&=F(\omega)\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(\omega)\delta(\omega)=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

最后一个等号的成立,是对无穷次可微函数 $f(t)$ 按(1.15)式及(1.16)式而得到的.这就表明,当 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$ 的条件不满足时,它的 Fourier 变换就应包括一个脉冲函数,即

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

特别,当 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=0$$

时,由于 $f(t)$ 是绝对可积的,所以

$$F(0)=\lim_{\omega\to0}F(\omega)=\lim_{\omega\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\omega\to0}[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=0.$$

由此可见,当 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$ 时,就有 $F(0)=0$,从而与前面的结果相一致.

习 题 四

1. 证明下列各式:

(1) $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$;

(2) $f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$;

(3) $a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)]$($a$ 为常数);

(4) $\mathrm{e}^{at}[f_1(t)*f_2(t)]=[\mathrm{e}^{at}f_1(t)]*[\mathrm{e}^{at}f_2(t)]$($a$ 为常数);

(5) $[f_1(t)+f_2(t)]*[g_1(t)+g_2(t)]=f_1(t)*g_1(t)+f_2(t)*g_1(t)+f_1(t)*g_2(t)+f_2(t)*g_2(t)$;

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)$;

(7) $f(t)*\delta(t)=f(t)$;

(8) $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$;

(9) $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$;

(10) $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$.

2. 若 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$,$f_2(t)=\sin t\cdot u(t)$,求 $f_1(t)*f_2(t)$.

3. 若 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant0\end{cases}$ 与

$f_2(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $f_1(t)*f_2(t)$.

4. 若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$,$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$,证明

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega).$$

5. 求下列函数的 Fourier 变换:

(1) $f(t)=\sin\omega_0t\cdot u(t)$;

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega_0t\cdot u(t)\quad(\beta>0)$;

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega_0t\cdot u(t)\quad(\beta>0)$;

(4) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0t}u(t)$;

(5) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0t}u(t-t_0)$;

(6) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0t}tu(t)$.

6. 证明互相关函数和互能量谱密度的下列性质:

$$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau),$$

$$S_{21}(\omega)=\overline{S_{12}(\omega)}.$$

7. 已知某信号的相关函数 $R(\tau)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2a|\tau|}$,求它的能量谱密度 $S(\omega)$.

8. 已知某波形的相关函数 $R(\tau)=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau$($\omega_0$ 为常数),求这个波形的能量谱密度.

9. 求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)\ (\alpha>0)$的能量谱密度.

10. 若函数 $f_1(t)=\begin{cases}\frac{b}{a}t, & 0\leqslant t\leqslant a,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 与 $f_2(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $f_1(t)$

和 $f_2(t)$的互相关函数 $R_{12}(\tau)$.

§1.5　Fourier 变换的应用

对一个系统进行分析和研究,首先要知道该系统的数学模型,也就是要建立该系统特性的数学表达式.所谓线性系统,在许多场合下,它的数学模型可以用一个线性的微分方程、积分方程、微分积分方程(这三类方程统称为微分、积分方程)乃至于偏微分方程来描述,或者说凡是满足叠加原理的一类系统可称为线性系统.这一类系统无论是在振动力学、电工学、无线电技术、自动控制理论或其它学科及工程技术领域的研究中,都占有很重要的地位.本节将应用 Fourier 变换来求解这类线性方程.

1. 微分、积分方程的 Fourier 变换解法

根据 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质,对欲求解的方程两端取 Fourier 变换,将其转化为象函数的代数方程,由这个代数方程求出象函数,然后再取 Fourier 逆变换就得出原来方程的解.这种解法的示意图可见图 1-16.这是我们求解此类方程的主要方法.具体做法可见下面的例子.

例 1　求积分方程 $\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin \omega t\,\mathrm{d}\omega = f(t)$ 的解 $g(\omega)$,其中

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & 0<t\leqslant\pi;\\ 0, & t>\pi.\end{cases}$$

解　因为该积分方程可以改写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin \omega t\,\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}f(t),$$

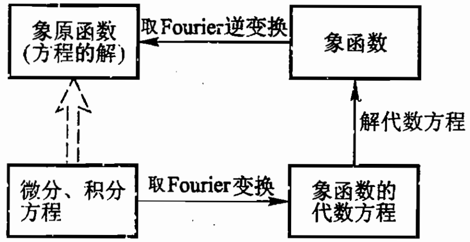


图 1-16

所以,由(1.12)式知,$\frac{2}{\pi}f(t)$为 $g(\omega)$的 Fourier 正弦逆变换,从而由(1.11)式,有

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}f(t)\sin \omega t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}\sin t\ \sin \omega t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(1-\omega)t-\cos(1+\omega)t]\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sin \omega\pi}{1-\omega^2}. \end{aligned}$$

我们还可以利用卷积定理来求解某些积分方程.

例 2　求解积分方程

$$g(t) = h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $h(t)$,$f(t)$为已知函数,且 $g(t)$,$h(t)$和 $f(t)$的 Fourier 变换都存在.

解　设 $\mathscr{F}[g(t)]=G(\omega)$,　$\mathscr{F}[h(t)]=H(\omega)$和 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$.由卷积定义知,积分方程右端第二项等于 $f(t)*g(t)$.因此上述积分方程两端取 Fourier 变换,由卷积定理可得

$$G(\omega)=H(\omega)+F(\omega)\cdot G(\omega),$$

所以

$$G(\omega)=\frac{H(\omega)}{1-F(\omega)}.$$

由 Fourier 逆变换,可求得积分方程的解

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\omega)}{1-F(\omega)}e^{j\omega t}d\omega. \end{aligned}$$

例 3 求常系数非齐次线性微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)-y(t)=-f(t)$$

的解,其中 $f(t)$为已知函数.

解 设 $\mathscr{F}[y(t)]=Y(\omega)$,$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$. 利用 Fourier 变换的线性性质和微分性质,对上述微分方程两端取 Fourier 变换,可得

$$(j\omega)^2Y(\omega)-Y(\omega)=-F(\omega),$$

所以

$$Y(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}F(\omega).$$

从而

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \end{aligned}$$

如果我们能够确定$\frac{1}{1+\omega^2}$的 Fourier 逆变换,则 $y(t)$可以通过卷积的形式给出. 由习题一的第 3 题第(1)小题(或附录 1 中的公式(21))可知,$\frac{1}{2}e^{-|t|}$与$\frac{1}{1+\omega^2}$构成一个 Fourier 变换对,因此,由卷积定理,有

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)*f(t) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-|t-\tau|}d\tau. \end{aligned}$$

例 4 求微分积分方程

$$ax'(t)+bx(t)+c\int_{-\infty}^{t}x(t)dt=h(t)$$

的解,其中 $-\infty<t<+\infty$,a,b,c 均为常数.

解 根据 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质,且记

$$\mathscr{F}[x(t)]=X(\omega),\mathscr{F}[h(t)]=H(\omega).$$

对上述方程两端取 Fourier 变换,可得

$$aj\omega X(\omega)+bX(\omega)+\frac{c}{j\omega}X(\omega)=H(\omega),$$

$$X(\omega)=\frac{H(\omega)}{b+j\left(a\omega-\frac{c}{\omega}\right)}.$$

而上式的 Fourier 逆变换为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\omega)}{b+j\left(a\omega-\frac{c}{\omega}\right)}e^{j\omega t}d\omega. \end{aligned}$$

通过上面四个例题可以看出,除例 1 是按 Fourier 正弦变换公式直接获得积分方程的解以外,其余三个例题的解法都是按示意图的三个步骤进行的;还可以看出,这类线性方程的未知函数都是单变量函数. 例如质点的位移,电路中的电流、电压等物理量一般都是时间 t 的函数. 这些物理量的变化规律在数学上的表示就形成上述各类方程. 但在自然界和工程技术领域中还有许多物理量不仅与时间 t 有关,还与空间位置(x,y,z)有关. 例如一根细长杆上的温度分布问题和声波在介质中传播的问题等,研究这些物理

量的变化规律就会获得含有未知的多变量函数及其偏导数的关系式,即称之为偏微分方程或数学物理方程;还要说明的是,如果要确定一个物理模型中某一物理量的具体的运动规律,除方程外,还需要附加一些条件,因为方程仅反映该物理模型中物理量的共同规律,而实际中提出的物理模型都有特定的"环境"和"初始状态",这在数学上就称为边界条件和初始条件,它们统称为定解条件.对于一个具体的物理模型来说,方程加上定解条件才是问题的完整提法,且称之为定解问题.方程加上初始条件构成的定解问题称为初值问题;方程加上边界条件构成的定解问题称为边值问题;而既有初始条件又有边界条件的定解问题又称为混合问题.关于定解问题的提法及其适定性问题在偏微分方程理论中有详细的论述,有兴趣的读者可参看有关书籍.下一小节,我们将通过例题表明 Fourier 变换还是求解偏微分方程的方法之一,其计算过程与求解上述各类线性方程大体相似.

2*. 偏微分方程的 Fourier 变换解法

本小节主要针对线性偏微分方程中的未知函数是二元函数的情形加以讨论,通过一些较典型的例题来说明 Fourier 变换求解某些偏微分方程定解问题的方法.

为了叙述方便起见,对于 $u=u(x,t)$ 及其偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 作为 x 的一元函数取 Fourier 变换时都满足 Fourier 变换中微分性质的条件;$\dfrac{\partial u}{\partial t},\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 关于 x 取 Fourier 变换时允许(偏)导数运算与积分运算交换次序,即

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-j\omega x}\,dx\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-j\omega x}\,dx\\&=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}[u(x,t)].\end{aligned}$$

同理,

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}[u(x,t)].$$

在解题时,不再重述这些条件,希望读者注意.

例 5　(一维波动方程的初值问题)利用 Fourier 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u\big|_{t=0}=\cos x,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin x.\end{cases}$$

解　由于未知函数 $u(x,t)$ 中的自变量 x 的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$,因此,对方程及初始条件关于 x 取 Fourier 变换,记

$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\omega,t)$,

$\mathscr{F}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=(j\omega)^2U(\omega,t)=-\omega^2U(\omega,t)$,

$\mathscr{F}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}[u(x,t)]=\dfrac{d^2}{dt^2}U(\omega,t)$,

$\mathscr{F}[\cos x]=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]$　(见附录 1 的公式(10)),

$\mathscr{F}[\sin x]=\pi j[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$　(见附录 1 的公式(11)).

这样,我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U}{dt^2}=-\omega^2U,\\ U\Big|_{t=0}=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)],\\ \dfrac{dU}{dt}\Big|_{t=0}=\pi j[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)].\end{cases}$$

这里,方程是 $U(\omega,t)$关于 t 的一个二阶常系数齐次微分方程,我们很容易得到该方程的通解为

$$U(\omega,t)=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t.$$

由初始条件可知

$$c_1=\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)],c_2=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)].$$

因此,常微分方程初值问题的解为

$$\begin{aligned}U(\omega,t)&=\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\sin\omega t+\\&\quad\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]\cos\omega t\\&=\left(\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}\sin\omega t+\pi\cos\omega t\right)\delta(\omega+1)+\\&\quad(\pi\cos\omega t-\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}\sin\omega t)\delta(\omega-1).\end{aligned}$$

对上述解进行 Fourier 逆变换,且利用 δ - 函数的筛选性质,可以获得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}\sin\omega t+\pi\cos\omega t)\delta(\omega+1)+\\&\quad(\pi\cos\omega t-\frac{\pi}{\omega}\mathrm{j}\sin\omega t)\delta(\omega-1)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega\\&=\sin t\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}+\cos t\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}\\&=\sin t\sin x+\cos t\cos x\\&=\cos(t-x).\end{aligned}$$

从例 5 求解的过程可以看出,用 Fourier 变换求解偏微分方程类似于图 1 - 16 的三个步骤,即先将定解问题中的未知函数看作某一个自变量的函数,对方程及定解条件关于该自变量取 Fourier 变换,把偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题;再根据这个常微分方程和相应的定解条件,求出象函数;然后再取 Fourier 逆变换,得到原定解问题的解.

例 6 (一维热传导方程的初值问题)利用 Fourier 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u|_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

解 同例 5,对定解问题关于 x 取 Fourier 变换,记

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\omega,t),$$
$$\mathscr{F}[f(x,t)]=F(\omega,t),$$
$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\omega^2U(\omega,t),$$
$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\omega,t),$$
$$\mathscr{F}[\varphi(x)]=\Phi(\omega).$$

这样,我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-a^2\omega^2U+F(\omega,t),\\ U|_{t=0}=\Phi(\omega).\end{cases}$$

由一阶线性非齐次常微分方程的求解公式可得

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}+\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

对上式两端取 Fourier 逆变换,且借助于附录 Ⅰ 中的公式(6),可知

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

再根据 Fourier 变换的卷积性质,从而可以获得原定解问题的解,即

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]\\&=\varphi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}+\\&\quad\int_0^t f(x,\tau)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

此例中的偏微分方程是非齐次的，这里 $f(x,t)$ 是与热源有关的量，而且求解的区域又是无界的，若用其它方法来求解，其运算要比 Fourier 变换方法复杂得多.

如果 $f(x,t)=0$，偏微分方程为齐次的.此时可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\mathrm{d}\xi.$$

例 7 （上半平面无源静电场内电势的边值问题）利用 Fourier 变换求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (-\infty<x<+\infty, y>0),\\ u\Big|_{y=0}=f(x), & \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} u=0. & \end{cases}$$

解 本例中的偏微分方程称为 Laplace 方程.它是用来描述稳恒过程的，所以未知函数 $u=u(x,y)$ 与时间 t 无关.由于 x 的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$，因此，我们对方程和边界条件关于 x 取 Fourier 变换，记

$$\mathscr{F}[u(x,y)]=U(\omega,y),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\omega^2 U(\omega,y),$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}U(\omega,y),$$

$$\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega).$$

这样，我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2}-\omega^2 U=0,\\ U\Big|_{y=0}=F(\omega),\\ \lim\limits_{\omega^2+y^2\to+\infty} U=\lim\limits_{y\to+\infty} U=0.\end{cases}$$

解此二阶常系数线性齐次微分方程可得其通解为

$$U(\omega,y)=c_1\mathrm{e}^{|\omega|y}+c_2\mathrm{e}^{-|\omega|y},$$

代入边界条件，有 $c_1+c_2=F(\omega)$，由 $\lim\limits_{y\to+\infty}U=0$，必有 $c_1=0$，从而 $c_2=F(\omega)$.因此，边值问题的解为

$$U(\omega,y)=F(\omega)\mathrm{e}^{-|\omega|y}.$$

对上式两端取 Fourier 逆变换，且借助于附录 Ⅰ 中的公式(31)，可知

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-|\omega|y}]=\frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}.$$

再利用 Fourier 变换的卷积性质，从而获得原定解问题的解，即

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,y)]\\ &=f(x)*\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\tau)}{(x-\tau)^2+y^2}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

下面我们将再举一例，说明利用 Fourier 正弦变换和余弦变换，也能求解某些偏微分方程的定解问题.

例 8 （半有界杆热传导方程的混合问题）求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<+\infty, t>0),\\ u\Big|_{x=0}=\varphi(t), & \\ u\Big|_{t=0}=0. & \end{cases}$$

解 根据热传导问题的物理意义，我们可以假定：当 $x\to+\infty$

时，有 $u(x,t)\to 0,\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)\to 0$. 由于已知边界条件 $u\Big|_{x=0}=\varphi(t)$，且 x 的变化范围是 $(0,+\infty)$，因此对方程和初始条件关于 x 取 Fourier 正弦变换，其中 $\mathscr{F}_s\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$ 的结果可由分部积分法得到. 记

$$\mathscr{F}_s[u(x,t)]=\int_0^{+\infty}u(x,t)\sin\omega x\,\mathrm{d}x=U_s(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\omega x\,\mathrm{d}x=\omega u\Big|_{x=0}-\omega^2 U_s,$$

$$\mathscr{F}_s[u|_{t=0}]=U_s|_{t=0},$$

$$\mathscr{F}_s\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_s.$$

这样，我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U_s}{\mathrm{d}t}=a^2[\omega\varphi(t)-\omega^2U_s],\\ U_s\Big|_{t=0}=0,\end{cases}$$

其解为

$$U_s(\omega,t)=\mathrm{e}^{-\omega^2a^2t}\int_0^t a^2\omega\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\omega^2a^2\xi}\mathrm{d}\xi.$$

对上式两端取 Fourier 正弦逆变换，并利用已知的积分公式

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

因此，原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}_s^{-1}[U_s(\omega,t)]\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}U_s(\omega,t)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2a^2}{\pi}\int_0^t\left[\int_0^{+\infty}\omega\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\xi)}\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega\right]\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{2a^2}{\pi}\int_0^t\varphi(\xi)\left[\frac{1}{-2a^2(t-\xi)}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\xi)}\sin\omega x\Big|_0^{+\infty}+\right.\\&\quad\left.\frac{1}{2a^2(t-\xi)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2(t-\xi)\omega^2}x\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\xi\\&=\frac{x}{\pi}\int_0^t\frac{\varphi(\xi)}{t-\xi}\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2(t-\xi)\omega^2}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\xi\\&=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

下面一个例子和例 8 相比较，仅仅是边界条件不同，我们需要用 Fourier 余弦变换来求解此定解问题.

例 9 （半有界杆热传导方程的混合问题）求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0<x<+\infty,t>0),\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\varphi(t),\\ u\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 类似于例 8 的解法，但由于已知的边界条件是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\varphi(t)$，因此对方程和初始条件关于 x 取 Fourier 余弦变换. 同样地，记

$$\mathscr{F}_c[u(x,t)]=\int_0^{+\infty}u(x,t)\cos\omega x\mathrm{d}x=U_c(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\omega x\mathrm{d}x=-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}-\omega^2U_c(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}_c[u|_{t=0}]=U_c\Big|_{t=0},$$

$$\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_c.$$

这样，我们就将求解原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}=a^2[-\varphi(t)-\omega^2 U_c],\\ U_c|_{t=0}=0,\end{cases}$$

其解为

$$U_c(\omega,t)=\mathrm{e}^{-\omega^2a^2t}\int_0^t -a^2\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\omega^2a^2\xi}\mathrm{d}\xi.$$

对上式两端取 Fourier 余弦逆变换可得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}_c^{-1}[U_c(\omega,t)]\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}U_c(\omega,t)\cos\omega x\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{-2a^2}{\pi}\int_0^t\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\xi)}\cos\omega x\mathrm{d}\omega\right]\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{-2a^2}{\pi}\int_0^t\varphi(\xi)\cdot\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t-\xi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi\\ &=-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t-\xi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

如果在例 9 中也使用 Fourier 正弦变换，就会发现 $\mathscr{F}_s\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\omega u|_{x=0}-\omega^2 U_s$ 中的边界条件 $u|_{x=0}=\varphi(t)$，在例 9 中未给定；反之，如果在例 8 中使用 Fourier 余弦变换，同样发现 $\mathscr{F}_c\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}-\omega^2 U_c$ 中的边界条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\varphi(t)$，在例 8 中也未给定. 由此可见，对此类定解问题，当边界条件为 $u\big|_{x=0}=\varphi(t)$ 时，应当对自变量 x 采用 Fourier 正弦变换；而边界条件为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\varphi(t)$ 时，应当对自变量 x 采用 Fourier 余弦变换.

本小节的例题主要是针对偏微分方程中的未知函数是二元函数的情形，从而可以用 Fourier 变换去求解一维波动方程，一维热传导方程及上半平面静电场的电势等定解问题. 如果我们要用 Fourier 变换去求解多维的上述各类例题的定解问题时，只需引进多元函数的 Fourier 变换，就能得到解决. 限于篇幅，这里不再叙述.

习 题 五

1. 求微分方程 $x'(t)+x(t)=\delta(t)$，$(-\infty<t<+\infty)$ 的解.

2. 设 $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$，利用象函数的导数公式，求 $f(t)$ 的 Fourier 变换.

3. 利用 Fourier 变换，解下列积分方程：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega=\frac{\sin t}{t}$；

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1;\\ 2, & 1\leqslant t<2;\\ 0, & t\geqslant 2;\end{cases}$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1-t, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ 0, & t>1;\end{cases}$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos t, & 0\leqslant t<\pi;\\ -\frac{\pi}{4}, & t=\pi;\\ 0, & t>\pi.\end{cases}$

4. 求解下列积分方程：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{t^2+b^2}$，$(0<a<b)$；

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-\tau|}y(\tau)\mathrm{d}\tau=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

5. 求下列微分积分方程的解 $x(t)$：

(1) $\displaystyle x'(t)-4\int_{-\infty}^{t}x(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-|t|}$，$-\infty<t<+\infty$；

(2) $\displaystyle ax'(t)+b\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=ch(t)$，其中 $f(t)$，$h(t)$ 为已知函数，a,b,c 均为已知常数.

6. 求解下列偏微分方程的定解问题：

$$(1)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\sin x & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u\Big|_{t=0}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin x.\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Au & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u\Big|_{t=0}=\delta(\xi-x),\end{cases}$$

其中 a,A 均为常数.

$$(3)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (-\infty<x<+\infty,y>0),\\ u\Big|_{y=0}=f(x), \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}u=0.\end{cases}$$

$$\text{(i) } f(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 1, & x>0;\end{cases}\qquad \text{(ii) } f(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 1, & -1<x<1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<+\infty,t>0),\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \\ u\Big|_{t=0}=\begin{cases}A, & 0<x<1,\\ 0, & 1<x<+\infty,\end{cases}\end{cases}$$

其中 a,A 均为常数.

$$(5)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<+\infty,t>0),\\ u\Big|_{x=0}=0, \\ u\Big|_{t=0}=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}\end{cases}$$

第二章 Laplace 变换

§2.1 Laplace 变换的概念

1. 问题的提出

在第一章我们讲过,一个函数当它除了满足 Dirichlet 条件以外,还在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足绝对可积的条件时,就一定存在古典意义下的 Fourier 变换.但绝对可积的条件是比较强的,许多函数即使是很简单的函数(如单位阶跃函数、正弦、余弦函数以及线性函数等)都不满足这个条件;其次,可以进行 Fourier 变换的函数必须在整个数轴上有定义,但在物理、无线电技术等实际应用中,许多以时间 t 作为自变量的函数往往在 $t<0$ 时是无意义的或者是不需要考虑的,像这样的函数都不能取 Fourier 变换.由此可见,Fourier 变换的应用范围受到相当大的限制.

对于任意一个函数 $\varphi(t)$,能否经过适当地改造使其进行 Fourier 变换时克服上述两个缺点呢?这就使我们想到前面讲过的单位阶跃函数 $u(t)$ 和指数衰减函数 $e^{-\beta t}(\beta>0)$ 所具有的特点.用前者乘 $\varphi(t)$ 可以使积分区间由 $(-\infty,+\infty)$ 换成 $[0,+\infty)$,用后者乘 $\varphi(t)$ 就有可能使其变得绝对可积,因此,为了克服 Fourier 变换上述的两个缺点,我们自然会想到用 $u(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$ 来乘 $\varphi(t)$,即

$$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}\quad(\beta>0).$$

结果发现,只要 β 选得适当,一般说来,这个函数的 Fourier 变换总是存在的.对函数 $\varphi(t)$ 进行先乘以 $u(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$,再取 Fourier 变换的运算,就产生了 Laplace 变换.

对函数 $\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$取 Fourier 变换,可得

$$G_\beta(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt$$
$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt,$$

其中

$$s=\beta+j\omega,\quad f(t)=\varphi(t)u(t).$$

若再设

$$F(s)=G_\beta\left(\frac{s-\beta}{j}\right),$$

则得

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt.$$

由此式所确定的函数 $F(s)$,实际上是由 $f(t)$通过一种新的变换得来的,这种变换我们称为 Laplace 变换.

定义 设函数 $f(t)$当 $t\geqslant0$ 时有定义,而且积分

$$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt\quad(s\text{ 是一个复参量})$$

在 s 的某一域内收敛,则由此积分所确定的函数可写为

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt.\tag{2.1}$$

我们称(2.1)式为函数 $f(t)$的 **Laplace 变换式**. 记为

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)],$$

$F(s)$称为 $f(t)$的 **Laplace 变换(或称为象函数)**.

若 $F(s)$是 $f(t)$的 Laplace 变换,则称 $f(t)$为 $F(s)$的 **Laplace 逆变换(或称为象原函数)**,记为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)].$$

由(2.1)式可以看出,$f(t)(t\geqslant0)$的 Laplace 变换,实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$的 Fourier 变换.

例 1 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0, t<0;\\1, t>0\end{cases}$的 Laplace 变换.

解 根据 Laplace 变换的定义,有

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt,$$

这个积分在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时收敛,而且有

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},$$

所以 $$\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

例 2 求指数函数 $f(t)=e^{kt}$的 Laplace 变换(k 为实数).

解 根据(2.1)式,有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{kt}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}dt,$$

这个积分在 $\mathrm{Re}(s)>k$ 时收敛,而且有

$$\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}dt=\frac{1}{s-k},$$

所以 $$\mathscr{L}[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}\quad(\mathrm{Re}(s)>k).$$

2. Laplace 变换的存在定理

从上面的例题可以看出,Laplace 变换存在的条件要比 Fourier 变换存在的条件弱得多,但是对一个函数作 Laplace 变换也还是要具备一些条件的. 那么,一个函数究竟满足什么条件时,它的 Laplace 变换一定存在呢? 下面的定理将解决这个问题.

Laplace 变换的存在定理 若函数 $f(t)$满足下列条件:

1°在 $t\geqslant0$ 的任一有限区间上分段连续;

2°当 $t\to+\infty$时,$f(t)$的增长速度不超过某一指数函数,亦即存在常数 $M>0$ 及 $c\geqslant0$,使得

$$|f(t)|\leqslant Me^{ct},0\leqslant t<+\infty$$

成立(满足此条件的函数,称它的增大是不超过指数级的,c 为它的增长指数).

则 $f(t)$的 Laplace 变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上一定存在，右端的积分在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$ 上绝对收敛而且一致收敛，并且在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 的半平面内，$F(s)$ 为解析函数.

证* 由条件 2°可知，对于任何 t 值 $(0\leqslant t<+\infty)$，有

$$|f(t)\mathrm{e}^{-st}|=|f(t)|\mathrm{e}^{-\beta t}\leqslant M\mathrm{e}^{-(\beta-c)t},\mathrm{Re}(s)=\beta,$$

若令 $\beta-c\geqslant\varepsilon>0$（即 $\beta\geqslant c+\varepsilon=c_1>c$），则

$$|f(t)\mathrm{e}^{-st}|\leqslant M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty}|f(t)\mathrm{e}^{-st}|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}t=\frac{M}{\varepsilon}.$$

根据含参量广义积分的性质可知，在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$ 上(2.1)式右端的积分不仅绝对收敛而且一致收敛①. 不仅如此，若在(2.1)式的积分号内对 s 求导，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}-tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

而

$$|-tf(t)\mathrm{e}^{-st}|\leqslant Mt\mathrm{e}^{-(\beta-c)t}\leqslant Mt\mathrm{e}^{-\varepsilon t},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}Mt\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}t=\frac{M}{\varepsilon^2}.$$

由此可见，$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$ 内也是绝对收敛并且一致收敛，从而微分和积分的次序可以交换，即

① 这里利用了含参量广义积分一致收敛的一个充分条件，现叙述如下：如存在函数 $\varphi(t)$，使得 $|g(t,s)|<\varphi(t)$，而且积分 $\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t$ 收敛（a,b 可为无限），则 $\int_a^b g(t,s)\mathrm{d}t$ 在某一闭区域内一定是绝对收敛，并且是一致收敛的.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}-tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathscr{L}[-tf(t)].$$

这就表明，$F(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 内是可微的. 根据复变函数的解析函数理论可知，$F(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 内是解析的.

这个定理的条件是充分的，物理学和工程技术中常见的函数大都能满足这两个条件：一个函数的增大是不超过指数级的和函数要绝对可积这两个条件相比，前者的条件弱得多. $u(t)$、$\cos kt$、t^m 等函数都不满足 Fourier 积分定理中绝对可积的条件，但它们都能满足 Laplace 变换存在定理中的条件 2：

$$|u(t)|\leqslant 1\cdot\mathrm{e}^{0t}，此处\ M=1,c=0;$$

$$|\cos kt|\leqslant 1\cdot\mathrm{e}^{0t}，此处\ M=1,c=0;$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^m}{\mathrm{e}^t}=0$，所以 t 充分大以后，有 $t^m\leqslant\mathrm{e}^t$（故 t^m 是 $M=1,c=1$ 的指数级增长函数），即

$$|t^m|\leqslant 1\cdot\mathrm{e}^t,$$

这里，$M=1,c=1$. 由此可见，对于某些问题（如在线性系统分析中），Laplace 变换的应用就更为广泛.

除了上面介绍的单位阶跃函数和指数函数的 Laplace 变换外，下面再求一些常用函数的 Laplace 变换.

例 3 求正弦函数 $f(t)=\sin kt$（k 为实数）的 Laplace 变换.

解 根据(2.1)式，有

$$\mathscr{L}[\sin kt]=\int_0^{+\infty}\sin kt\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2+k^2}(-s\sin kt-k\cos kt)\Big|_0^{+\infty}$$
$$=\frac{k}{s^2+k^2}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

同理可得余弦函数的 Laplace 变换

$$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}\quad (\mathrm{Re}(s)>0).$$

例 4* 求幂函数 $f(t)=t^m$(常数 $m>-1$)的 Laplace 变换.

解 根据(2.1)式,有

$$\mathscr{L}[t^m]=\int_0^{+\infty} t^m e^{-st}\,dt,$$

为了求此积分,若令 $st=u$,由于 s 为右半平面内任一复数,则得到复数的积分变量 u.因此,可先考虑积分

$$\int_0^R t^m e^{-st}\,dt=\int_0^{sR}\left(\frac{u}{s}\right)^m e^{-u}\left(\frac{du}{s}\right)=\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{sR}u^m e^{-u}\,du,$$

这里的积分路线是图 2-1 中的 OB 直线段.如设

$$s=re^{j\theta},\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},$$

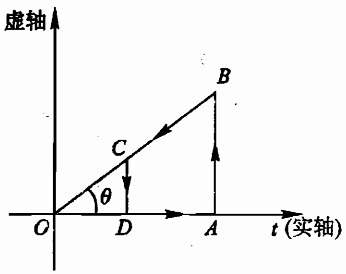


图 2-1

则 B 就对应着 $sR=rR\cos\theta+jrR\sin\theta$ 这样的点,A 对应着 $rR\cos\theta$ 这样的点.由于上述积分的被积函数在原点不是解析的,为此,取长度 ε,使 C 对应着 $s\varepsilon=r\varepsilon\cos\theta+jr\varepsilon\sin\theta$ 这样的点,而 D 对应着 $r\varepsilon\cos\theta$ 这样的点.根据 Cauchy 积分定理,有

$$\frac{1}{s^{m+1}}\oint_{DABCD}u^m e^{-u}\,du=\frac{1}{s^{m+1}}\left[\int_{\overline{DA}}+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}\right]=0.$$

在上式中两边取 $R\to+\infty,\varepsilon\to0$ 时,有

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{DA}}u^m e^{-u}\,du=\frac{1}{s^{m+1}}\int_{r\varepsilon\cos\theta}^{rR\cos\theta}u^m e^{-u}\,du\to\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty}t^m e^{-t}\,dt;$$

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{BC}}u^m e^{-u}\,du=-\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{CB}}u^m e^{-u}\,du=-\frac{1}{s^{m+1}}\int_{s\varepsilon}^{sR}u^m e^{-u}\,du$$

$$=-\frac{1}{s^{m+1}}\int_{r\varepsilon\cos\theta+jr\varepsilon\sin\theta}^{rR\cos\theta+jrR\sin\theta}u^m e^{-u}\,du$$

$$\to-\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{\infty}u^m e^{-u}\,du;$$

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{AB}}u^m e^{-u}\,du=\frac{1}{s^{m+1}}\int_{rR\cos\theta}^{rR\cos\theta+jrR\sin\theta}u^m e^{-u}\,du.$$

如令 $u=rR\cos\theta+jv,\ du=j\,dv$,则

$$\left|\frac{1}{s^{m+1}}\int_{rR\cos\theta}^{rR\cos\theta+jrR\sin\theta}u^m e^{-u}\,du\right|$$

$$=\left|\frac{j}{s^{m+1}}\int_0^{rR\sin\theta}e^{-(rR\cos\theta+jv)}(rR\cos\theta+jv)^m\,dv\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|s|^{m+1}}\int_0^{rR|\sin\theta|}\left|e^{-rR\cos\theta}\cdot e^{-jv}(rR\cos\theta+jv)^m\right|dv$$

$$=\frac{1}{|s|^{m+1}}\int_0^{rR|\sin\theta|}e^{-rR\cos\theta}(r^2R^2\cos^2\theta+v^2)^{\frac{m}{2}}\,dv.$$

令 $v=rR\cos\theta\tan\alpha,\ dv=rR\cos\theta\sec^2\alpha\,d\alpha$,又因为 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$,有 $\cos\theta>0$,所以

$$\left|\frac{1}{s^{m+1}}\int_{rR\cos\theta}^{rR\cos\theta+jrR\sin\theta}u^m e^{-u}\,du\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|s|^{m+1}}\int_0^{|\theta|}e^{-rR\cos\theta}(rR\cos\theta)^{m+1}\sec^{m+2}\alpha\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{|s|^{m+1}}(rR\cos\theta)^{m+1}e^{-rR\cos\theta}\int_0^{|\theta|}\sec^{m+2}\alpha\,d\alpha\to0,$$

从而

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{rR\cos\theta}^{rR\cos\theta+jrR\sin\theta}u^m e^{-u}\,du\to0;$$

依同理

$$\left|\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{CD}} u^m e^{-u} du\right| = \left|\frac{-1}{s^{m+1}}\int_{\overline{DC}} u^m e^{-u} du\right|$$

$$= \left|\frac{1}{s^{m+1}}\int_{r\varepsilon\cos\theta}^{r\varepsilon\cos\theta+\mathrm{j}r\varepsilon\sin\theta} u^m e^{-u} du\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|s|^{m+1}}(r\varepsilon\cos\theta)^{m+1}e^{-r\varepsilon\cos\theta}\int_0^{|\theta|}\sec^{m+2}\alpha d\alpha \to 0 \quad (m>-1),$$

从而

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_{\overline{CD}} u^m e^{-u} du \to 0 \quad (m>-1),$$

故

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt + 0 - \frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{\infty} u^m e^{-u} du + 0 = 0,$$

即

$$\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{\infty} u^m e^{-u} du = \frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}.$$ [1]

因此

$$\mathscr{L}[t^m] = \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad (\mathbf{Re}(s)>0).$$

当 m 为正整数[2]时，$\mathscr{L}[t^m] = \dfrac{m!}{s^{m+1}}$ $\quad(\mathbf{Re}(s)>0)$.

例 5　求周期性三角波 $f(t) = \begin{cases} t, & 0\leqslant t<b; \\ 2b-t, & b\leqslant t<2b, \end{cases}$

① 我们定义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{m-1}dt$ 为 Gamma 函数(或 Γ 函数)，记为 $\Gamma(m)$，即

$$\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{m-1}dt，其中\ m>0.$$

容易证明 Γ 函数具有如下的递推公式

$$m\Gamma(m) = \Gamma(m+1).$$

由此可知，当 m 为正整数时，$\Gamma(m+1) = m!$.

② 当 m 为正整数时，利用 Laplace 变换中的微分性质将很方便地获得这一结果.

且 $f(t+2b) = f(t)$（见图 2-2）的 Laplace 变换.

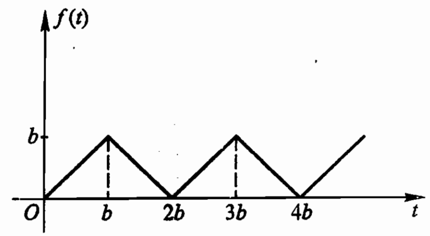


图 2-2

解　根据(2.1)式，有

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{2b} f(t)e^{-st}dt + \int_{2b}^{4b} f(t)e^{-st}dt + \int_{4b}^{6b} f(t)e^{-st}dt + \cdots +$$

$$\int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)e^{-st}dt + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)e^{-st}dt.$$

令 $t = \tau + 2kb$，则

$$\int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{2b} f(\tau+2kb)e^{-s(\tau+2kb)}d\tau$$

$$= e^{-2kbs}\int_0^{2b} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau,$$

而

$$\int_0^{2b} f(t)e^{-st}dt = \int_0^b te^{-st}dt + \int_b^{2b}(2b-t)e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}(1-e^{-bs})^2.$$

所以

$$\mathscr{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kbs}\int_0^{2b} f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{2b} f(t)e^{-st}dt \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kbs}\right).$$

由于当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时,

$$|e^{-2bs}|=e^{-\beta 2b}<1,$$

所以

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(e^{-2kbs})=\frac{1}{1-e^{-2bs}},$$

从而

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)]&=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\int_0^{2b}f(t)e^{-st}dt\\&=\frac{1}{1-e^{-2bs}}(1-e^{-bs})^2\frac{1}{s^2}\\&=\frac{1}{s^2}\frac{(1-e^{-bs})^2}{(1-e^{-bs})(1+e^{-bs})}\\&=\frac{1}{s^2}\frac{1-e^{-bs}}{1+e^{-bs}}=\frac{1}{s^2}\tanh\frac{bs}{2}.\end{aligned}$$

一般地,以 T 为周期的函数 $f(t)$,即 $f(t+T)=f(t)(t>0)$,当 $f(t)$在一个周期上是分段连续时,则有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$$

成立.这就是求周期函数的 Laplace 变换公式.

我们还要指出,满足 Laplace 变换存在定理条件的函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处为有界时,积分

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

中的下限取 0^+ 或 0^- 不会影响其结果.但当 $f(t)$在 $t=0$ 处包含了脉冲函数时,则 Laplace 变换的积分下限必须明确指出是 0^+ 还是 0^-,因为

$$\mathscr{L}_+[f(t)]=\int_{0^+}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt,$$

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{0^+}f(t)e^{-st}dt+\mathscr{L}_+[f(t)].$$

而当 $f(t)$在 $t=0$ 附近有界时,$\int_{0^-}^{0^+}f(t)e^{-st}dt=0$,即

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\mathscr{L}_+[f(t)].$$

当 $f(t)$在 $t=0$ 处包含了脉冲函数时,$\int_{0^-}^{0^+}f(t)e^{-st}dt\neq 0$,即

$$\mathscr{L}_-[f(t)]\neq\mathscr{L}_+[f(t)].$$

为了考虑这一情况,我们需将进行 Laplace 变换的函数 $f(t)$,当 $t\geqslant 0$ 时有定义扩大为当 $t>0$ 及 $t=0$ 的任意一个邻域内有定义.这样,书中 Laplace 变换的定义

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

应为

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt.$$

但为了书写方便起见,我们仍写成(2.1)式的形式①.

例 6　求单位脉冲函数 $\delta(t)$的 Laplace 变换.

解　根据上面的讨论,按(2.1)式,并利用性质:$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\delta(t)]&=\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt\\&=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=e^{-st}\Big|_{t=0}=1.\end{aligned}$$

例 7　求函数 $f(t)=e^{-\beta t}\delta(t)-\beta e^{-\beta t}u(t)(\beta>0)$的 Laplace 变换.

解　根据(2.1)式,有

① 对于例 4 中的幂函数 $f(t)=t^m$,当 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$等正、负分母为偶数的分数时,可将 t^m 理解为 $t^m u(t)$再求 Laplace 变换.

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}[e^{-\beta t}\delta(t)-\beta e^{-\beta t}u(t)]e^{-st}dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-(s+\beta)t}dt-\beta\int_0^{+\infty}e^{-(s+\beta)t}dt$$
$$=e^{-(s+\beta)t}\Big|_{t=0}+\frac{\beta e^{-(s+\beta)t}}{s+\beta}\Big|_0^{+\infty}=1-\frac{\beta}{s+\beta}=\frac{s}{s+\beta}.$$

在今后的实际工作中,我们并不需要用广义积分的方法来求函数的 Laplace 变换,有现成的 Laplace 变换表可查,就如同使用三角函数表、对数表及积分表一样.本书已将工程实际中常遇到的一些函数及其 Laplace 变换列于附录Ⅱ中,以备读者查用.

下面再举一些通过查表求 Laplace 变换的例子.

例 8 求 $\sin 2t\sin 3t$ 的 Laplace 变换.

解 根据附录Ⅱ中公式(20),在 $a=2,b=3$ 时,可以很方便地得到

$$\mathscr{L}[\sin 2t\sin 3t]=\frac{12s}{(s^2+5^2)(s^2+1^2)}=\frac{12s}{(s^2+25)(s^2+1)}.$$

读者不妨按定义验算和比较一下.

例 9 求 $\frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt-\sin bt)$ 的 Laplace 变换.

解 这个函数的 Laplace 变换,在本书给出的附录Ⅱ中找不到现成的结果,但是

$$\frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt-\sin bt)=e^{-bt}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos bt-\cos\frac{\pi}{4}\sin bt\right)$$
$$=e^{-bt}\sin\left(-bt+\frac{\pi}{4}\right).$$

根据附录Ⅱ中公式(17),在 $a=-b,c=\frac{\pi}{4}$ 时,可以得到

$$\mathscr{L}\left[\frac{e^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt-\sin bt)\right]=\mathscr{L}\left[e^{-bt}\sin\left(-bt+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{(s+b)\sin\frac{\pi}{4}+(-b)\cos\frac{\pi}{4}}{(s+b)^2+(-b)^2}=\frac{\sqrt{2}s}{2(s^2+2bs+2b^2)}.$$

总之,查表求函数的 Laplace 变换要比按定义去做方便得多,特别是掌握了 Laplace 变换的性质,再使用查表的方法,就能更快地找到所求函数的 Laplace 变换.

习 题 一

1. 求下列函数的 Laplace 变换,并给出其收敛域,再用查表的方法来验证结果.

(1) $f(t)=\sin\frac{t}{2}$; (2) $f(t)=e^{-2t}$;

(3) $f(t)=t^2$; (4) $f(t)=\sin t\cos t$;

(5) $f(t)=\sinh kt$,(k 为实数); (6) $f(t)=\cosh kt$,(k 为复数);

(7) $f(t)=\cos^2 t$; (8) $f(t)=\sin^2 t$.

2. 求下列函数的 Laplace 变换:

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2,\\ -1, & 2\leqslant t<4,\\ 0, & t\geqslant 4;\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}3, & t<\frac{\pi}{2},\\ \cos t, & t>\frac{\pi}{2};\end{cases}$

(3) $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$;

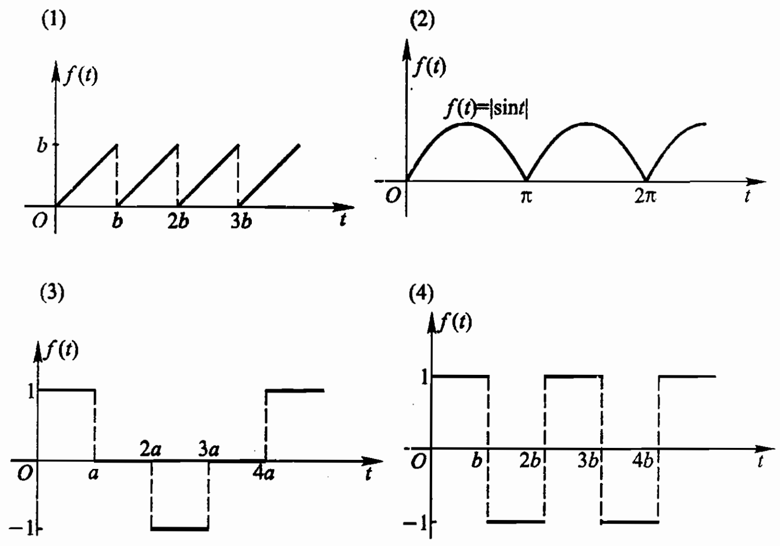
(4) $f(t)=\cos t\cdot\delta(t)-\sin t\cdot u(t)$.

3. 设 $f(t)$是以 2π 为周期的函数,且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\leqslant\pi,\\ 0, & \pi<t<2\pi,\end{cases}$$

求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

4. 求下列各图所示周期函数的 Laplace 变换:



§2.2　Laplace 变换的性质

这一节，我们将介绍 Laplace 变换的几个基本性质，它们在 Laplace 变换的实际应用中都是很有用的. 为了叙述方便起见，假定在这些性质中，凡是要求 Laplace 变换的函数都满足 Laplace 变换存在定理中的条件，并且把这些函数的增长指数都统一地取为 c. 在证明这些性质时，我们不再重述这些条件，希望读者注意.

1. 线性性质

若 α,β 是常数，

$$\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s),\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s),$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathscr{L}[f_1(t)]+\beta\mathscr{L}[f_2(t)],\\&\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)].\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

这个性质表明函数线性组合的 Laplace 变换等于各函数 Laplace 变换的线性组合. 它的证明只须根据定义，利用积分性质就可推出.

2. 微分性质

若

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(s),$$

则有

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0).\tag{2.3}$$

证　根据 Laplace 变换的定义，有

$$\mathscr{L}[f'(t)]=\int_0^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

对右端积分利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t&=f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0)^{①}\quad(\mathbf{Re}(s)>c).\end{aligned}$$

所以　$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0).$$

这个性质表明了一个函数求导后取 Laplace 变换等于这个函数的 Laplace 变换乘以参变数 s，再减去函数的初值.

推论　若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则有

$$\mathscr{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0),$$

一般地，
$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]&=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots\\&\quad-f^{(n-1)}(0)\\&=s^nF(s)-\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-1-i}f^{(i)}(0)\quad(\mathbf{Re}(s)>c).\end{aligned}\tag{2.4}$$

特别，当初值 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时，有

① 这里 $f(0)$ 应理解为 $f(0^-)$，以下同，但当 $f(t)$ 在 $t<0$ 无定义时，可取 $f(0^-)=f(t)u(t)|_{t=0^-}=0$.

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s),\quad \mathscr{L}[f''(t)]=s^2F(s),\cdots,$$
$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s). \tag{2.5}$$

此性质使我们有可能将 $f(t)$ 的微分方程转化为 $F(s)$ 的代数方程,因此它对分析线性系统有着重要的作用,现在利用它推算一些函数的 Laplace 变换.

例 1　利用(2.4)式求函数 $f(t)=\cos kt$ 的 Laplace 变换.

解　由于 $f(0)=1,f'(0)=0,f''(t)=-k^2\cos kt$,则由(2.4)式有

$$\mathscr{L}[-k^2\cos kt]=\mathscr{L}[f''(t)]=s^2\mathscr{L}[f(t)]-sf(0)-f'(0),$$

即

$$-k^2\mathscr{L}[\cos kt]=s^2\mathscr{L}[\cos kt]-s,$$

移项化简得

$$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}\quad(\mathbf{Re}(s)>0).$$

例 2　利用(2.4)式,求函数 $f(t)=t^m$ 的 Laplace 变换,其中 m 是正整数.

解　由于 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$,而 $f^{(m)}(t)=m!$.

所以

$$\mathscr{L}[m!]=\mathscr{L}[f^{(m)}(t)]=s^m\mathscr{L}[f(t)]-s^{m-1}f(0)-s^{m-2}f'(0)-\cdots-f^{(m-1)}(0),$$

即

$$\mathscr{L}[m!]=s^m\mathscr{L}[t^m],$$

而

$$\mathscr{L}[m!]=m!\mathscr{L}[1]=\frac{m!}{s},$$

所以

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}\quad(\mathbf{Re}(s)>0).$$

此外,由 Laplace 变换存在定理,还可以得到象函数的微分性质:

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)],\mathbf{Re}(s)>c. \tag{2.6}$$

一般地,有

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)],\mathbf{Re}(s)>c. \tag{2.7}$$

它的证明留给读者.

例 3　求函数 $f(t)=t\sin kt$ 的 Laplace 变换.

解　因为 $\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,根据上述象函数的微分性质可知

$$\mathscr{L}[t\sin kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right]=\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2},\mathbf{Re}(s)>0$$

同理可得

$$\mathscr{L}[t\cos kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right]=\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}.\quad \mathbf{Re}(s)>0$$

3. 积分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s). \tag{2.8}$$

证　设 $h(t)=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$,则有

$$h'(t)=f(t),且\ h(0)=0.$$

由上述微分性质,有

$$\mathscr{L}[h'(t)]=s\mathscr{L}[h(t)]-h(0)=s\mathscr{L}[h(t)],$$

即

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}F(s).$$

这个性质表明了一个函数积分后再取 Laplace 变换等于这个函数的 Laplace 变换除以复参数 s.

重复应用(2.8)式,就可得到:

$$\mathscr{L}\left\{\underbrace{\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}t\cdots\int_0^t}_{n次}f(t)\mathrm{d}t\right\}=\frac{1}{s^n}F(s). \tag{2.9}$$

此外，由 Laplace 变换存在定理，还可以得到象函数的积分性质：若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s \tag{2.10}$$

或

$$f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s\right].$$

一般地，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty}}_{n\text{次}}F(s)\mathrm{d}s. \tag{2.11}$$

它的证明留给读者.

例 4 求函数 $f(t)=\dfrac{\sinh t}{t}$ 的 Laplace 变换.

解 因为 $\mathscr{L}[\sinh t]=\dfrac{1}{s^2-1}$（见习题一的 1(5)），根据上述象函数的积分性质可知

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sinh t}{t}\right]=\int_s^{\infty}\mathscr{L}[\sinh t]\mathrm{d}s=\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2-1}\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{s-1}{s+1}\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}.$$

如果积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ 存在，按(2.10)式，取 $s=0$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}F(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$. 这一公式，常用来计算某些积分. 例如，$\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\arctan s\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

这与 Dirichlet 积分的结果完全一致.

4. 位移性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a)\quad(\mathbf{Re}(s-a)>c). \tag{2.12}$$

证 根据(2.1)式，有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t,$$

由此看出，上式右方只是在 $F(s)$ 中把 s 换成 $s-a$，所以

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a)\quad(\mathbf{Re}(s-a)>c).$$

这个性质表明了一个象原函数乘以指数函数 e^{at} 的 Laplace 变换等于其象函数作位移 a.

例 5 求 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}t^m]$.

解 我们已经知道 $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$，利用位移性质，可得

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}t^m]=\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}.$$

例 6 求 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}\sin kt]$.

解 已知 $\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$，由位移性质可得

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}\sin kt]=\frac{k}{(s+a)^2+k^2}.$$

5. 延迟性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，又 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对于任一非负实数 τ，有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s),$$
或
$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau). \tag{2.13}$$

证 根据(2.1)式，有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\tau}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{\tau}^{+\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

由条件可知，当 $t<\tau$ 时，$f(t-\tau)=0$，所以上式右端第一个积分为零. 对于第二个积分，令 $t-\tau=u$，则

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-s(u+\tau)}\,\mathrm{d}u$$
$$= \mathrm{e}^{-s\tau}\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u$$
$$= \mathrm{e}^{-s\tau}F(s) \quad (\mathrm{Re}(s) > c).$$

函数 $f(t-\tau)$ 与 $f(t)$ 相比，$f(t)$ 是从 $t=0$ 开始有非零数值．而 $f(t-\tau)$ 是从 $t=\tau$ 开始才有非零数值，即延迟了一个时间 τ．从它们的图像来看，$f(t-\tau)$ 的图像是由 $f(t)$ 的图像沿 t 轴向右平移距离 τ 而得，如图 2－3 所示．这个性质表明，时间函数延迟 τ 的 Laplace 变换等于它的象函数乘以指数因子 $\mathrm{e}^{-s\tau}$．因此，该性质也可以叙述为：对任意的正数 τ，有

$$\mathscr{F}[f(t-\tau)u(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-s\tau}F(s)$$

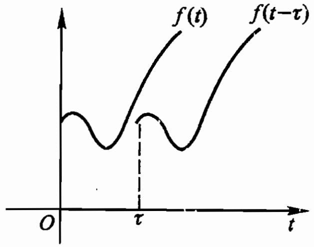


图 2－3

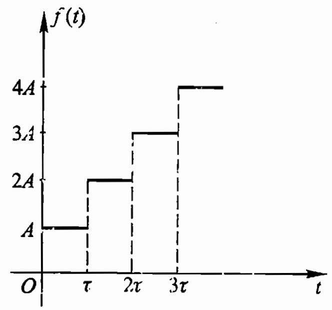


图 2－4

例 7 求函数 $u(t-\tau)=\begin{cases}0, t<\tau;\\ 1, t>\tau\end{cases}$ 的 Laplace 变换．

解 我们已经知道 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$，根据延迟性质，有

$$\mathscr{L}[u(t-\tau)] = \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s\tau}.$$

例 8 求如图 2－4 所示的阶梯函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换．

解 利用单位阶跃函数，可将这个阶梯函数表示为

$$f(t) = A[u(t) + u(t-\tau) + u(t-2\tau) + \cdots]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} Au(t-k\tau).$$

上式两边取 Laplace 变换，并假定右边也可以逐项取 Laplace 变换①，再由 Laplace 变换的线性性质及延迟性质，可得

$$\mathscr{L}[f(t)] = A\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s\tau}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s\tau}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-3s\tau}+\cdots\right).$$

当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，有 $|\mathrm{e}^{-s\tau}|<1$，所以，上式右端圆括号中为一公比的模小于 1 的等比级数，从而

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{A}{s}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\tau}} = \frac{A}{s}\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\frac{s\tau}{2}})(1+\mathrm{e}^{-\frac{s\tau}{2}})}$$
$$= \frac{A}{2s}\left(1+\coth\frac{s\tau}{2}\right) \quad (\mathrm{Re}(s)>0).$$

一般地，若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则对任何 $\tau>0$，有

$$\mathscr{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(t-k\tau)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}[f(t-k\tau)]$$
$$= F(s)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\tau}} \quad (\mathrm{Re}(s) > c).$$

例 9 求如图 2－5 所示的单个半正弦波 $f(t)$ 的 Laplace 变换．

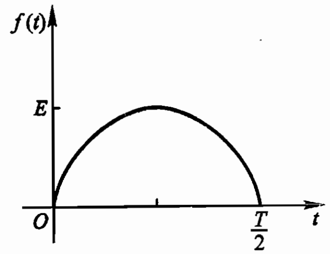


图 2－5

① 可以证明，满足 Laplace 变换存在定理条件的函数 $f(t)$（$t<0$ 时，$f(t)=0$），对任何 $\tau>0$，有

$$\mathscr{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(t-k\tau)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}[f(t-k\tau)].$$

解 由图 2－6 可知，$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$，所以

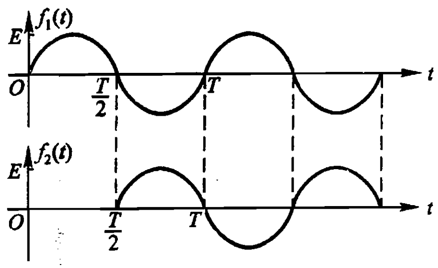


图 2－6

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[f_1(t)]+\mathscr{L}[f_2(t)]$$

$$=E\mathscr{L}\left[\sin\frac{2\pi}{T}t\cdot u(t)\right]+E\mathscr{L}\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\cdot u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{E\,\dfrac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2}\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right),\qquad \frac{2\pi}{T}=\omega.$$

例 10 求如图 2－7 所示的半波正弦函数 $f_T(t)$的 Laplace 变换.

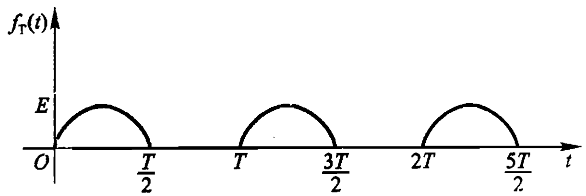


图 2－7

解 这实际上是周期函数的 Laplace 变换的问题，但也可以用延迟性质加以解决．由例 9 可得从 $t=0$ 开始的单个半正弦波的 Laplace 变换为

$$F(s)=\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right),$$

从而

$$\mathscr{L}[f_T(t)]=\frac{F(s)}{1-e^{-sT}}=\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}.$$

这是一个求周期函数 Laplace 变换的简单方法，即设 $f_T(t)(t>0)$ 是周期为 T 的周期函数，如果

$$f(t)=\begin{cases}f_T(t), & 0\leqslant t<T,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}[f_T(t)]=\frac{F(s)}{1-e^{-sT}}.$$

6*. 初值定理与终值定理

(1) 初值定理

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，且 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在，则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to 0}f(t)&=\lim_{s\to\infty}sF(s),\\ f(0)&=\lim_{s\to\infty}sF(s).\end{aligned}\right\}\qquad(2.14)$$

或写为（见上式第二行）

证 根据 Laplace 变换的微分性质，有

$$\mathscr{L}[f'(t)]=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0)$$
$$=sF(s)-f(0).$$

由于已假定 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在，故 $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}sF(s)$亦必存在，且两者相等，即

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}sF(s).$$

在前式两端取 $\mathrm{Re}(s)\to+\infty$时的极限，得

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}\mathscr{L}[f'(t)]=\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}[sF(s)-f(0)]$$
$$=\lim_{s\to\infty}sF(s)-f(0),$$

但

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}\mathscr{L}[f'(t)] = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty}\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = 0,$$

(由 Laplace 变换存在定理所述的关于积分的一致收敛性,从而允许交换积分与极限的运算次序)所以

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0) = 0,$$

即
$$\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)^{①} = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

这个性质表明函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 时的函数值可以通过 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)$ 乘以 s 取 $s\to\infty$ 时的极限值而得到,它建立了函数 $f(t)$ 在坐标原点的值与函数 $sF(s)$ 的无限远点的值之间的关系.

(2) 终值定理

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$,且 $sF(s)$ 的所有奇点全在 s 平面的左半部,则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0} sF(s),\\ f(+\infty) &= \lim_{s\to 0} sF(s).\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

或写为

证 根据定理给出的条件和微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

两边取 $s\to 0$ 的极限,得

$$\lim_{s\to 0}\mathscr{L}[f'(t)] = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0),$$

但是

$$\lim_{s\to 0}\mathscr{L}[f'(t)] = \lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty}\lim_{s\to 0}\mathrm{e}^{-st}f'(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t = f(t)\Big|_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0),$$

① 可以证明,初值 $f(0)$ 总是指当 $t\to 0^+$ 时 $f(t)$ 的极限.只要这个极限存在,它与 Laplace 变换的积分下限是 0^+ 还是 0^- 无关.

所以

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0).$$

即

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(+\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

这个性质表明函数 $f(t)$ 在 $t\to+\infty$ 时的数值(即稳定值),可以通过 $f(t)$ 的 Laplace 变换乘以 s 取 $s\to 0$ 时的极限值而得到,它建立了函数 $f(t)$ 在无限远的值与函数 $sF(s)$ 在原点的值之间的关系.

在 Laplace 变换的应用中,往往先得到 $F(s)$ 再去求出 $f(t)$.但我们有时并不关心函数 $f(t)$ 的表达式,而是需要知道 $f(t)$ 在 $t\to 0$ 或 $t\to+\infty$ 时的性态,这两个性质给我们提供了方便,能使我们直接由 $F(s)$ 来求出 $f(t)$ 的两个特殊值 $f(0)$,$f(+\infty)$.

例 11 若 $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s+a}$,求 $f(0)$,$f(+\infty)$.

解 根据(2.14)式及(2.15)式

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+a} = 1,$$

$$f(+\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a} = 0.$$

我们已经知道 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}] = \dfrac{1}{s+a}$,即 $f(t) = \mathrm{e}^{-at}$.显然,上面所求结果与直接由 $f(t)$ 所计算的结果是一致的.

但应用终值定理时需要注意定理条件是否满足,例如函数 $f(t)$ 的 $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$,则 $sF(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ 的奇点为 $s=\pm\mathrm{j}$ 位于虚轴上,就不满足定理的条件.虽然 $\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s}{s^2+1} = 0$,而 $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$,$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\sin t$ 是不存在的.

习 题 二

1. 求下列函数的 Laplace 变换式：

(1) $f(t)=t^2+3t+2$；　　(2) $f(t)=1-te^t$；

(3) $f(t)=(t-1)^2e^t$；　　(4) $f(t)=\frac{t}{2a}\sin at$；

(5) $f(t)=t\cos at$；　　(6) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$；

(7) $f(t)=e^{-2t}\sin 6t$；　　(8) $f(t)=e^{-4t}\cos 4t$；

(9) $f(t)=t^ne^{at}$；　　(10) $f(t)=u(3t-5)$；

(11) $f(t)=u(1-e^{-t})$；　　(12) $f(t)=\frac{e^{3t}}{\sqrt[3]{t}}$.

2. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，a 为正实数，证明(相似性质)

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),$$

并利用此结论，计算下列各式：

(1) 已知 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\arctan\frac{1}{s}$，求 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right]$；

(2) 求 $\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)]$，$b$ 为正实数；

(3) 求 $\mathscr{L}\left[e^{-\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$；

(4) 求 $\mathscr{L}\left[e^{-at}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$.

3. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，证明(象函数的微分性质)

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)],\ \mathrm{Re}(s)>c.$$

特别 $\mathscr{L}[tf(t)]=-F'(s)$，或 $f(t)=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)]$，并利用此结论，计算下列各式：

(1) $f(t)=te^{-3t}\sin 2t$，求 $F(s)$；

(2) $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt$，求 $F(s)$；

(3) $F(s)=\ln\frac{s+1}{s-1}$，求 $f(t)$；

(4) $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\,dt$，求 $F(s)$.

4. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，证明(象函数的积分性质)

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(s)ds,\text{或 } f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(s)ds\right].$$

并利用此结论，计算下列各式：

(1) $f(t)=\frac{\sin kt}{t}$，求 $F(s)$；　　(2) $f(t)=\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}$，求 $F(s)$；

(3) $F(s)=\frac{s}{(s^2-1)^2}$，求 $f(t)$；　(4) $f(t)=\int_0^t\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt$，求 $F(s)$.

5. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}\cos bt-e^{-mt}\cos nt}{t}dt$；

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-3t}\cos 2t\,dt$；

(5) $\int_0^{+\infty}te^{-2t}dt$；　　(6) $\int_0^{+\infty}te^{-3t}\sin 2t\,dt$；

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{2}t}\sinh t\sin t}{t}dt$；　(8) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt$；

(9) $\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}\sin t\,dt$；　　(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$；

(11) $\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{erf}\sqrt{t}\,dt$，其中 $\mathrm{erf}\sqrt{t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du$ 称为误差函数；

(12) $\int_0^{+\infty}J_0(t)dt$，

其中 $J_0(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$ 称为零阶 Bessel 函数.

6. 求下列函数的 Laplace 逆变换：

(1) $F(s)=\frac{1}{s^2+4}$；　　(2) $F(s)=\frac{1}{s^4}$；

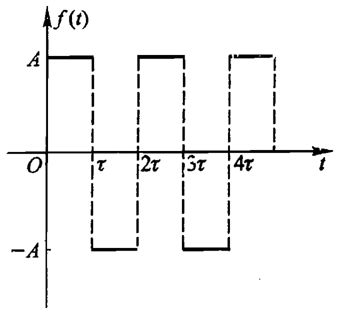
(3) $F(s)=\frac{1}{(s+1)^4}$；　　(4) $F(s)=\frac{1}{s+3}$；

(5) $F(s)=\frac{2s+3}{s^2+9}$；　　(6) $F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}$；

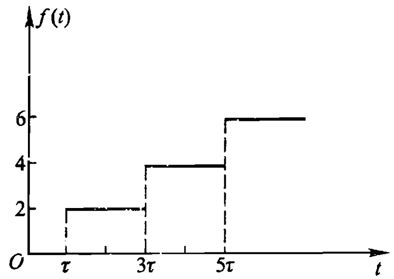
(7) $F(s)=\frac{s+1}{s^2+s-6}$；　　(8) $F(s)=\frac{2s+5}{s^2+4s+13}$.

7. 求下列各图所示函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换.

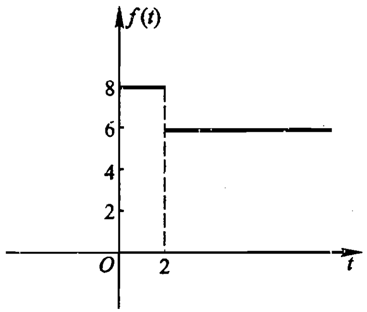
(1)



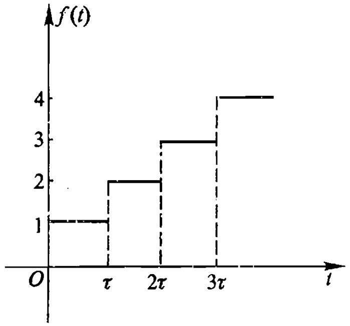
(2)



(3)



(4)



§2.3　Laplace 逆变换

前面我们主要讨论了由已知函数 $f(t)$ 求它的象函数 $F(s)$，但在实际应用中常会碰到与此相反的问题，即已知象函数 $F(s)$ 求它的象原函数 $f(t)$. 本节就来解决这个问题.

由 Laplace 变换的概念可知，函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换，实际

上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换. 于是，当 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 满足 Fourier 积分定理的条件时，按 Fourier 积分公式，在 $f(t)$ 连续点处有

$$\begin{aligned} f(t)u(t)e^{-\beta t} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}d\omega\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)e^{-(\beta+j\omega)\tau}d\tau\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+j\omega)e^{j\omega t}d\omega, t > 0. \end{aligned}$$

等式两边同乘以 $e^{\beta t}$，并考虑到它与积分变量 ω 无关，则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+j\omega)e^{(\beta+j\omega)t}d\omega, t > 0.$$

令 $\beta+j\omega=s$，有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}ds, t > 0, \tag{2.16}$$

这就是从象函数 $F(s)$ 求它的象原函数 $f(t)$ 的一般公式. 右端的积分称为 Laplace **反演积分**. 尽管前面我们利用 Laplace 变换的一些性质推出了某些象原函数和象函数之间的对应关系，但对一些比较复杂的象函数，要求出其象原函数，就不得不借助于 Laplace 反演公式，它和(2.1)式 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 成为一对互逆的积分变换公式，我们也称 $f(t)$ 和 $F(s)$ 构成了一个 Laplace 变换对. 由于(2.16)式是一个复变函数的积分；计算复变函数的积分通常比较困难，但当 $F(s)$ 满足一定条件时，可以用留数方法来计算这个反演积分. 特别当 $F(s)$ 为有理函数时更为简单. 下面的定理将提供计算这种反演积分的方法.

定理　若 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是函数 $F(s)$ 的所有奇点(适当选取 β 使这些奇点全在 $\mathrm{Re}(s)<\beta$ 的范围内)，且当 $s\to\infty$ 时，$F(s)\to 0$，则有

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n}\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}],$$

即

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)\mathrm{e}^{st}],\qquad t>0.\qquad(2.17)$$

证 作图 2－8 所示的闭曲线 $C=L+C_R$，C_R 在 $\mathrm{Re}(s)<\beta$ 的区域内是半径为 R 的圆弧，当 R 充分大后，可以使 $F(s)$ 的所有奇点包含在闭曲线 C 围成的区域内．同时 e^{st} 在全平面上解析，所以 $F(s)\mathrm{e}^{st}$ 的奇点就是 $F(s)$ 的奇点．根据留数定理可得

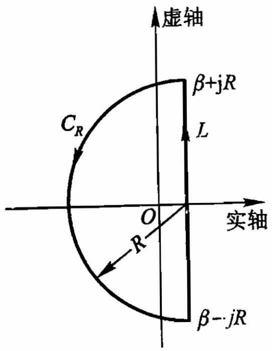


图 2－8

$$\oint_C F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)\mathrm{e}^{st}]$$

即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\left[\int_{\beta-\mathrm{j}R}^{\beta+\mathrm{j}R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s+\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\right]=\sum_{k=1}^{n}\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)\mathrm{e}^{st}].$$

在上式左方，取 $R\to+\infty$ 时的极限，并根据复变函数论中的 Jordan 引理①，当 $t>0$ 时，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=0,$$

从而

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)\mathrm{e}^{st}],\quad t>0.$$

这就证明了我们的定理．

① Jordan 引理有几种形式，这里指出的是其中一种，称为推广的 Jordan 引理：设复变数 s 的一个函数 $F(s)$ 满足下列条件

(1) 它在左半平面内 $(\mathrm{Re}(s)<\beta)$ 除有限个奇点外是解析的；

(2) 对于 $\mathrm{Re}(s)<\beta$ 的 s，当 $|s|=R\to+\infty$ 时，$F(s)$ 一致地趋于零．则当 $t>0$ 时有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=0,$$

其中 $C_R:|s|=R,\mathrm{Re}(s)<\beta$，它是一个以点 $\beta+\mathrm{j}0$ 为圆心，R 为半径的圆弧．

若函数 $F(s)$ 是有理函数：$F(s)=\dfrac{A(s)}{B(s)}$，其中 $A(s)$，$B(s)$ 是不可约的多项式，$B(s)$ 的次数是 n，而且 $A(s)$ 的次数小于 $B(s)$ 的次数，在这种情况下它满足定理对 $F(s)$ 所要求的条件，因此 (2.17) 式成立．

情况一：若 $B(s)$ 有 n 个单零点 $s_1,s_2,\cdots,s_n$，即这些点都是 $\dfrac{A(s)}{B(s)}$ 的单极点，根据留数的计算方法，有

$$\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\mathrm{e}^{st}\right]=\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\mathrm{e}^{s_kt},$$

从而根据 (2.17) 式，有

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\mathrm{e}^{s_kt},\qquad t>0.\qquad(2.18)$$

情况二：若 s_1 是 $B(s)$ 的一个 m 级零点，$s_{m+1},s_{m+2},\cdots,s_n$ 是 $B(s)$ 的单零点，即 s_1 是 $\dfrac{A(s)}{B(s)}$ 的 m 级极点，$s_i(i=m+1,m+2,\cdots,n)$ 是它的单极点．根据留数的计算方法，有

$$\underset{s=s_1}{\mathrm{Res}}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\mathrm{e}^{st}\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to s_1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}s^{m-1}}\left[(s-s_1)^m\frac{A(s)}{B(s)}\mathrm{e}^{st}\right],$$

所以有

$$f(t)=\sum_{i=m+1}^{n}\frac{A(s_i)}{B'(s_i)}\mathrm{e}^{s_it}+\frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to s_1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}s^{m-1}}\left[(s-s_1)^m\frac{A(s)}{B(s)}\mathrm{e}^{st}\right],\quad t>0.\quad(2.19)$$

这两个公式都称为 Heaviside 展开式．在用 Laplace 变换解常微分方程时经常碰到．

例 1 利用留数方法求 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ 的逆变换．

解 这里 $B(s)=s^2+1$，它有两个单零点 $s_1=\mathrm{j}$，$s_2=-\mathrm{j}$，由 (2.18) 式得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\frac{s}{2s}e^{st}\bigg|_{s=j}+\frac{s}{2s}e^{st}\bigg|_{s=-j}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{jt}+e^{-jt})=\cos t,t>0.$$

这和我们熟知的结果是一致的.

例 2 利用留数方法求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$的逆变换.

解 这里 $B(s)=s(s-1)^2$，$s=0$ 为单零点，$s=1$ 为二级零点，由(2.19)式可得

$$f(t)=\frac{1}{3s^2-4s+1}e^{st}\bigg|_{s=0}+\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}e^{st}\right]=1+\lim_{s\to1}\left(\frac{t}{s}e^{st}-\frac{1}{s^2}e^{st}\right)$$

$$=1+(te^t-e^t)=1+e^t(t-1),\qquad t>0.$$

由象函数找象原函数除了上述介绍的方法以外，还可以用部分分式和查表的方法来解决.

例 3 利用部分分式方法求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$的逆变换.

解 因为 $F(s)$为一有理分式，可以利用部分分式的方法将 $F(s)$化成

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}.$$

所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=-1+t+e^{-t}.$$

例 4 利用查表方法求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+1)^2}$的逆变换.

解 虽然 $F(s)$是有理分式，但利用部分分式的方法，较为麻烦，可以利用查表的方法求得结果. 根据附录 Ⅱ 中公式(31)，在 $a=1$ 时，有

$$f(t)=(1-\cos t)-\frac{1}{2}t\sin t.$$

例 5 利用查表方法求 $F(s)=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$的逆变换.

解 在附录 Ⅱ 所列的表中找不到现成的公式，但

$$F(s)=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}=\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}-\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2},$$

等式右边的两项，分别是附录 Ⅱ 中的公式(30)和公式(29)，所以

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}(\sin at-at\cos at),$$

这样，
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=t\cos at.$$

例 6 求 $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$的逆变换.

解 根据附录 Ⅱ 中公式(36)，立即可得

$$f(t)=\frac{e^{-t}}{(-2-1)(3-1)}+\frac{e^{2t}}{(1+2)(3+2)}+\frac{e^{-3t}}{(1-3)(-2-3)}$$

$$=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{15}e^{2t}+\frac{1}{10}e^{-3t}.$$

利用部分分式的方法也能方便地获得结果. 因为

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}=\frac{-\frac{1}{6}}{s+1}+\frac{\frac{1}{15}}{s-2}+\frac{\frac{1}{10}}{s+3},$$

所以

$$f(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{15}e^{2t}+\frac{1}{10}e^{-3t}.$$

利用留数方法也能求得结果(读者不妨一试). 总之，在今后的实际工作中，应视具体问题来决定求法.

习 题 三

1. 设 $f_1(t)$，$f_2(t)$均满足 Laplace 变换存在定理的条件(设它们的增长

指数均为 c),且 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$,$\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$,证明乘积 $f_1(t)\cdot f_2(t)$的 Laplace 变换一定存在,且

$$\mathscr{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F_1(q)F_2(s-q)\mathrm{d}q$$

其中 $\beta>c$,$\mathrm{Re}(s)>\beta+c$.

2. 求下列函数的 Laplace 逆变换(象原函数);并用另一种方法加以验证.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+a^2}$;　(2) $F(s)=\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$;

(3) $F(s)=\dfrac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$;　(4) $F(s)=\dfrac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}$;

(5) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+a^2)s^3}$;　(6) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$;

(7) $F(s)=\dfrac{1}{s^4-a^4}$;　(8) $F(s)=\dfrac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}$;

(9) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$;　(10) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$.

3. 求下列函数的 Laplace 逆变换.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$;　(2) $F(s)=\dfrac{s}{s+2}$;

(3) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$;　(4) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$;

(5) $F(s)=\dfrac{s+1}{9s^2+6s+5}$;　(6) $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$;

(7) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$;　(8) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$;

(9) $F(s)=\dfrac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}$;　(10) $F(s)=\dfrac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$;

(11) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$;　(12) $F(s)=\dfrac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^3}$;

(13) $F(s)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$;　(14) $\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$.

§2.4　卷　积

前面我们介绍了 Laplace 变换的几个基本性质.本节还要介绍 Laplace 变换的卷积性质.它不仅被用来求某些函数的逆变换及一些积分值,而且在线性系统的分析中起着重要的作用.

1. 卷积的概念

在第一章我们已经讨论了 Fourier 变换的卷积性质.在那里讲过,两个函数的卷积是指

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

如果 $f_1(t)$与 $f_2(t)$都满足条件:当 $t<0$ 时,$f_1(t)=f_2(t)=0$,则上式可写成

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{0}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&\quad+\int_t^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{2.20}$$

可见这里的卷积定义和 Fourier 变换中给出的卷积定义是完全一致的.今后如不特别声明,都假定这些函数在 $t<0$ 时恒为零.它们的卷积都按(2.20)式计算.

例 1　求函数 $f_1(t)=t$ 和 $f_2(t)=\sin t$ 的卷积,即求 $t*\sin t$.

解　根据定义,

$$t*\sin t=\int_0^t\tau\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

分部积分一次,可得

$$\begin{aligned}t*\sin t&=\int_0^t\tau\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=t-\sin t.\end{aligned}$$

按(2.20)计算的卷积亦有 $|f_1(t)*f_2(t)|\leqslant|f_1(t)|*|f_2(t)|$,它也满足交换律:$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$,所以

$$\sin t*t=t-\sin t.$$

同样,它还满足结合律与对加法的分配律,即

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t),$$
$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

2. 卷积定理

假定 $f_1(t),f_2(t)$满足 Laplace 变换存在定理中的条件,且 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s),\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$,则 $f_1(t)*f_2(t)$的 Laplace 变换一定存在,且

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)$$
或
$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t). \tag{2.21}$$

证 容易验证 $f_1(t)*f_2(t)$满足 Laplace 变换存在定理的条件,它的变换式为

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]e^{-st}dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt.$$

从上面这个积分式子可以看出,积分区域如图 2-9 所示(阴影部分).由于二重积分绝对可积,可以交换积分次序,即

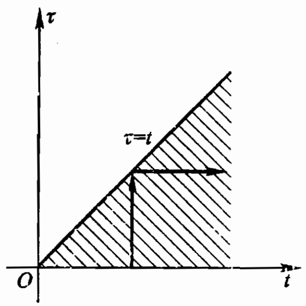


图 2-9

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-st}dt\right]d\tau.$$

令 $t-\tau=u$,则

$$\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}f_2(u)e^{-s(u+\tau)}du=e^{-s\tau}F_2(s),$$

所以

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)e^{-s\tau}F_2(s)d\tau$$
$$=F_2(s)\int_0^{+\infty}f_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$
$$=F_1(s)\cdot F_2(s).$$

这个性质表明两个函数卷积的 Laplace 变换等于这两个函数 Laplace 变换的乘积.

不难推证,若 $f_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$满足 Laplace 变换存在定理中的条件,且 $\mathscr{L}[f_k(t)]=F_k(s)(k=1,2,\cdots,n)$则有

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)\cdot\cdots\cdot F_n(s).$$

在 Laplace 变换的应用中,卷积定理起着十分重要的作用.下面我们利用它来求一些函数的逆变换.

例 2 若 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(1+s^2)}$,求 $f(t)$.

解 因为 $$F(s)=\frac{1}{s^2(1+s^2)}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

取 $$F_1(s)=\frac{1}{s^2},F_2(s)=\frac{1}{s^2+1},$$

于是 $$f_1(t)=t,f_2(t)=\sin t$$

根据卷积定理和例 1,得

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=t*\sin t=t-\sin t.$$

例 3 若 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$,求 $f(t)$.

解 因为 $$F(s)=\frac{s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1},$$

所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right]=\cos t*\cos t$$

$$=\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

例 4 若 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$，求 $f(t)$.

解 因为 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}=\dfrac{1}{[(s+2)^2+3^2]^2}$.

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}.$$

根据位移性质，

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]=e^{-2t}\sin 3t,$$

所以

$$f(t)=\frac{1}{9}(e^{-2t}\sin 3t)*(e^{-2t}\sin 3t)$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^t e^{-2\tau}\sin 3\tau e^{-2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{9}e^{-2t}\int_0^t\sin 3\tau\sin 3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{9}e^{-2t}\int_0^t\frac{1}{2}[\cos(6\tau-3t)-\cos 3t]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{18}e^{-2t}\left[\frac{\sin(6\tau-3t)}{6}-\tau\cos 3t\right]\Bigg|_0^t$$

$$=\frac{1}{54}e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t).$$

不难看出，例 2～例 4 中的函数也可以利用其它方法来求其逆变换，读者不妨自己试一试.

习 题 四

1. 求下列卷积：

(1) $1*1$; (2) $t*t$;

(3) t^m*t^n (m、n 为正整数); (4) $t*e^t$;

(5) $\sin t*\cos t$; (6) $\sin kt*\sin kt$ ($k\neq 0$);

(7) $t*\sinh t$; (8) $\sinh at*\sinh at$ ($a\neq 0$);

(9) $u(t-a)*f(t)$ ($a\geqslant 0$); (10) $\delta(t-a)*f(t)$ ($a\geqslant 0$).

2. 设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，利用卷积定理，证明 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\dfrac{F(s)}{s}$.

3. 利用卷积定理，证明 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]=\dfrac{t}{2a}\sin at$.

4. 利用卷积定理，证明

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau,$$

并求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]$.

5. 证明卷积满足对加法的分配律：

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

6. 证明卷积满足结合律：

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t).$$

§2.5 Laplace 变换的应用

Laplace 变换和 Fourier 变换一样，在许多工程技术和科学研究领域中有着广泛的应用，特别是在力学系统、电学系统、自动控制系统、可靠性系统以及随机服务系统等系统科学中都起着重要作用. 人们在研究这些系统时，往往是从实际问题出发，将研究的对象归结为一个数学模型，在许多场合下，这个数学模型是线性的. 换句话说，它可以用线性的积分方程、微分方程、微分积分方程乃至于偏微分方程等来描述，这样，我们可以象用 Fourier 变换那

样，用 Laplace 变换这一方法去分析和求解这类线性方程，而且我们可以发现这一方法是十分有效的，甚至是不可缺少的. 它的求解步骤和用 Fourier 变换方法求解此类线性方程的步骤完全类似(参看图 1－16)，下面我们将分别加以介绍. 最后，还要给出线性系统的传递函数这一重要概念.

通过§1.5 和本节的讨论，我们将能够明白在不同的情况下如何使用这两类变换，希望读者注意比较和总结.

1. 微分、积分方程的 Laplace 变换解法

例 1 求方程 $y''+2y'-3y=e^{-t}$满足初始条件

$$y\big|_{t=0}=0,\ y'\big|_{t=0}=1$$

的解.

解 设方程的解 $y=y(t)$，$t\geqslant 0$ 且设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$. 对方程的两边取 Laplace 变换，并考虑到初始条件，则得

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}.$$

这是含未知量 $Y(s)$的代数方程，整理后解出 $Y(s)$，得

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)},$$

这便是所求函数的 Laplace 变换，取它的逆变换便可以得出所求函数 $y(t)$.

为了求 $Y(s)$的逆变换，将它化为部分分式的形式，即

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}=\frac{-\frac{1}{4}}{(s+1)}+\frac{\frac{3}{8}}{(s-1)}+\frac{-\frac{1}{8}}{(s+3)},$$

取逆变换，最后得

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$

$$=\frac{1}{8}(3e^{t}-2e^{-t}-e^{-3t}).$$

这便是所求微分方程满足所给初始条件的解.

本例是一个常系数非齐次线性常微分方程满足初始条件的求解问题. 按照§1.5 中的提法，有时也简称为常系数线性微分方程的初值问题. 下面将给出一个常系数线性微分方程的边值问题的例子.

例 2 求方程 $y''-2y'+y=0$ 满足边界条件

$$y(0)=0,\ y(l)=4$$

的解，其中 l 为已知常数.

解 设方程的解 $y=y(x)$，$0\leqslant x\leqslant l$ 且设 $\mathscr{L}[y(x)]=Y(s)$(注意自变量 t 通常表示时间，如不会混淆，这里也可以记 $y=y(t)$). 对方程的两边取 Laplace 变换，并考虑到边界条件，则得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2[sY(s)-y(0)]+Y(s)=0.$$

整理后可得

$$Y(s)=\frac{y'(0)}{(s-1)^2}.$$

取其逆变换，可得

$$y(x)=y'(0)xe^{x}.$$

为了确定 $y'(0)$，令 $x=l$，代入上式，由第二个边界条件可得

$$4=y(l)=y'(0)le^{l}.$$

从而

$$y'(0)=\frac{4}{l}e^{-l},$$

于是

$$y(x)=\frac{4}{l}xe^{x-l}.$$

这便是所求微分方程满足边界条件的解. 通过求解过程可以发现，常系数线性微分方程的边值问题可以先当作它的初值问题来求解，而所得微分方程的解中含有未知的初值可由已知的边值而求得，从而最后完全确定微分方程满足边界条件的解.

对于某些变系数的微分方程，即方程中每一项为 $t^n y^{(m)}(t)$的形式时也可以用 Laplace 变换的方法求解. 由象函数的微分性质

可知

$$\mathscr{L}[t^n f(t)]=(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathscr{L}[f(t)],$$

从而

$$\mathscr{L}[t^n f^{(m)}(t)]=(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathscr{L}[f^{(m)}(t)].$$

下面我们给出一个求解变系数微分方程初值问题的例子.

例 3 求方程 $ty''+(1-2t)y'-2y=0$ 满足初始条件

$$y\Big|_{t=0}=1, y'\Big|_{t=0}=2$$

的解.

解 对方程两边取 Laplace 变换,设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$,即

$$\mathscr{L}[ty'']+\mathscr{L}[(1-2t)y']-\mathscr{L}[2y]=0,$$

亦即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+sY(s)-y(0)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[sY(s)-y(0)]-2Y(s)=0.$$

考虑到初始条件,代入整理化简后可得

$$(2-s)Y'(s)-Y(s)=0.$$

这是可分离变量的一阶微分方程,即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{Y}=-\frac{\mathrm{d}s}{s-2}.$$

积分后可得

$$\ln Y(s)=-\ln(s-2)+\ln C,$$

所以

$$Y(s)=\frac{C}{s-2},$$

取逆变换可得 $y(t)=Ce^{2t}$,为确定常数 C,令 $t=0$ 代入,有

$$1=y(0)=C.$$

故方程满足初始条件的解为 $y(t)=e^{2t}$.

例 4 求积分方程

$$y(t)=h(t)+\int_0^t y(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

的解,其中 $h(t)$,$f(t)$为定义在$[0,+\infty)$上的已知实值函数.

解 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$,$\mathscr{L}[h(t)]=H(s)$及 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$. 对方程两边取 Laplace 变换,由卷积定理可得

$$\begin{aligned}Y(s)&=H(s)+\mathscr{L}[y(t)*f(t)]\\&=H(s)+Y(s)\cdot F(s),\end{aligned}$$

所以

$$Y(s)=\frac{H(s)}{1-F(s)}.$$

如果令 $s=\beta+\mathrm{j}\omega$,由 Laplace 反演积分公式,有

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{1-F(s)}\right]\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\omega}^{\beta+\mathrm{j}\omega}\frac{H(s)}{1-F(s)}e^{st}\mathrm{d}s,\quad (t>0).\end{aligned}$$

这里,我们给出的是由象函数 $Y(s)$求它的象原函数 $y(t)$的一般公式,如果 $h(t)$和 $f(t)$具体给出时,可以直接从象函数 $Y(s)$的关系式中求出 $y(t)$. 例如,当 $h(t)=t^2$,$f(t)=\sin t$ 时,则

$$H(s)=\mathscr{L}[t^2]=\frac{2}{s^3},\quad F(s)=\frac{1}{s^2+1},$$

此时

$$Y(s)=\frac{\frac{2}{s^3}}{1-\frac{1}{s^2+1}}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5},$$

从而

$$y(t)=2\left(\frac{t^2}{2!}\right)+2\left(\frac{t^4}{4!}\right)=t^2+\frac{1}{12}t^4.$$

可以看出这一积分方程实际上是一个卷积型的积分方程,它有着许多实际应用. 例如在更新过程中有许多重要的量(如更新函

数，更新密度等）均满足这一方程．因此，在更新过程中特别称此积分方程为更新方程．下面我们再给出一些实际例子．

例 5 质量为 m 的物体挂在弹簧系数为 k 的弹簧一端（如图 2－10 所示），作用在物体上的外力为 $f(t)$．若物体自静止平衡位置 $x=0$ 处开始运动，求该物体的运动规律 $x(t)$．

解 根据 Newton 定律，有

$$mx''=f(t)-kx,$$

其中 $-kx$ 由 Hooke 定律所得，是使物体回到平衡位置的弹簧的恢复力．所以，物体运动的微分方程为

$$mx''+kx=f(t)\quad (t\geqslant 0),$$

且
$$x(0)=x'(0)=0.$$

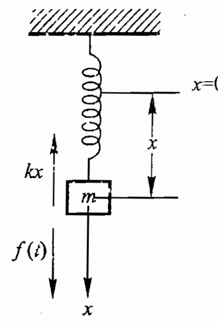


图 2－10

这是二阶常系数非齐次微分方程，现对方程两边取 Laplace 变换，设 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$，$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，并考虑到初始条件，则得

$$ms^2X(s)+kX(s)=F(s),$$

如记 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$，有

$$X(s)=\frac{1}{m}\cdot\frac{F(s)}{s^2+\omega_0^2}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\cdot F(s).$$

因为 $\mathscr{L}\left[\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right]=\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}$，应用卷积定理，有

$$x(t)=\frac{1}{m}\cdot\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}*f(t)$$
$$=\frac{1}{m\omega_0}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

如 $f(t)$ 具体给出时，可以直接从解的象函数 $X(s)$ 的关系式中解出 $x(t)$ 来．例如：

当物体在 $t=0$ 时受到冲击力 $f(t)=A\delta(t)$，其中 A 为常数．

此时，

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[A\delta(t)]=A,$$

所以

$$X(s)=\frac{A}{m}\cdot\frac{1}{s^2+\omega_0^2},$$

从而

$$x(t)=\frac{A}{m\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

可见，在冲击力作用下，运动为一正弦振动，振幅是 $\dfrac{A}{m\omega_0}$，角频率是 ω_0，称 ω_0 为该系统的自然频率（或称固有频率）．

值得注意的是上述微分方程是在 $t\geqslant 0$ 时建立起来的．如果在 $t>0$ 时，则微分方程及初始条件都会有变化，即

$$mx''+kx=0$$

且
$$x(0)=0,x'(0)=\frac{A}{m}.$$

这是因为冲击力 $\delta(t)$，当 $t>0$ 时已经作用过了，并且在 $t=0$ 时，使物体的初速由零突变到 $\dfrac{A}{m}$，但它们的解完全相同．读者不妨计算一下．

当物体所受作用力为 $f(t)=A\sin\omega t$（A 为常数）时，

$$\mathscr{L}[f(t)]=A\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

所以

$$X(s)=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\cdot\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$=\frac{A\omega}{m}\cdot\frac{1}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}$$
$$=\frac{A\omega}{m}\cdot\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right),$$

从而

$$x(t)=\frac{A\omega}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

$$=\frac{A}{m\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)}(\omega\sin\omega_0 t-\omega_0\sin\omega t).$$

这里 ω 为作用力的频率(或称扰动频率).若 $\omega\neq\omega_0$,运动是由两种不同频率的振动复合而成.若 $\omega=\omega_0$(即扰动频率等于自然频率),便产生共振,此时振幅将随时间无限增大.这是理论上的情形.实际上,在振幅相当大时,或者系统已被破坏,或者系统已不再满足原来的微分方程.

例 6 在图 2-11 所示的 RC 串联电路中,若外加电动势为正弦交流电压 $e(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi)$,求开关闭合后,回路中电流 $i(t)$及电容器两端的电压 $u_C(t)$.

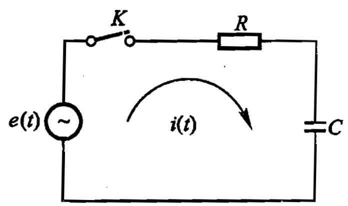


图 2-11

解 根据 Kirchhoff 定律,有

$$u_R+u_C=e(t),$$

其中

$$u_R=Ri(t),i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

所以

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=e(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi),$$

这就是该电路中电容器两端电压所满足的关系式,它是一阶线性

非齐次微分方程,现对方程式两边取 Laplace 变换,设

$\mathscr{L}[u_C(t)]=U_C(s)$,并注意到 $u_C(t)|_{t=0}=0$,得

$$RCsU_C(s)+U_C(s)=\mathscr{L}[e(t)].$$

但

$$\mathscr{L}[e(t)]=\mathscr{L}[U_m(\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi)]$$

$$=\frac{U_m\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}+\frac{U_m s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{U_m}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi).$$

所以

$$RCsU_C(s)+U_C(s)=\frac{U_m}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi),$$

即

$$U_C(s)=\frac{U_m(\omega\cos\varphi+s\sin\varphi)}{RC\left(s+\frac{1}{RC}\right)(s-\mathrm{j}\omega)(s+\mathrm{j}\omega)}.$$

$U_C(s)$的一阶极点为 $s_1=-\frac{1}{RC},s_2=\mathrm{j}\omega,s_3=-\mathrm{j}\omega$.

根据 Heaviside 展开式(2.18),得

$$u_C(t)=\frac{U_m}{RC}\left[\frac{\omega\cos\varphi-\frac{1}{RC}\sin\varphi}{\left(-\frac{1}{RC}-\mathrm{j}\omega\right)\left(-\frac{1}{RC}+\mathrm{j}\omega\right)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+\right.$$

$$\frac{\omega\cos\varphi+\mathrm{j}\omega\sin\varphi}{\left(\mathrm{j}\omega+\frac{1}{RC}\right)(2\mathrm{j}\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+$$

$$\left.\frac{\omega\cos\varphi-\mathrm{j}\omega\sin\varphi}{\left(-\mathrm{j}\omega+\frac{1}{RC}\right)(-2\mathrm{j}\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right],$$

利用 Euler 公式,通过化简整理可得

$$u_C(t)=\frac{U_m}{\omega C}\left[\frac{R}{\left(R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}\right)}\cos\varphi-\frac{\frac{1}{\omega C}}{\left(R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}\right)}\sin\varphi\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+$$

$$\frac{U_m}{RC}\left[\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}}{-2\omega+\frac{2j}{RC}}+\frac{e^{-j(\omega t+\varphi)}}{-2\omega-\frac{2j}{RC}}\right]$$

$$=\frac{1}{\omega C}\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\left[\frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cos\varphi+\frac{-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\sin\varphi\right]e^{-\frac{t}{RC}}-$$

$$\frac{1}{\omega C}\cdot\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\left[\frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cos(\omega t+\varphi)+\frac{-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\sin(\omega t+\varphi)\right].$$

由于在 RC 串联电路中,其阻抗为

$$Z=R-j\frac{1}{\omega C},\ |Z|=\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}},(\text{见图 }2-12),$$

$$I_m=\frac{U_m}{|Z|},$$

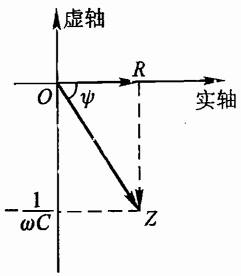


图 2-12

这样

$$u_C(t)=\frac{I_m}{\omega C}(\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)e^{-\frac{t}{RC}}-$$
$$\frac{I_m}{\omega C}[\cos\psi\cos(\omega t+\varphi)+\sin\psi\sin(\omega t+\varphi)]$$
$$=\frac{I_m}{\omega C}\cos(\varphi-\psi)e^{-\frac{t}{RC}}-\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t+\varphi-\psi).$$

过渡电流 $i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}$,所以

$$i(t)=C\left[\frac{I_m}{\omega C}\cos(\varphi-\psi)e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right)+\frac{I_m}{\omega C}\sin(\omega t+\varphi-\psi)\cdot\omega\right]$$
$$=-\frac{I_m}{R\omega C}\cos(\varphi-\psi)e^{-\frac{t}{RC}}+I_m\sin(\omega t+\varphi-\psi).$$

这两个结果表明了电路在接通电源 $e(t)$以后,$u_C(t)$和 $i(t)$随时间变化的规律.它们都是由两部分构成的.由线性微分方程解的结构可知,它们的第一项对应着线性齐次微分方程的通解,称为所求量的暂态分量;它们的第二项对应着线性非齐次微分方程的特解,称为所求量的稳态分量.可以看出当时间 $t\to+\infty$时,暂态分量消失,表明过渡过程结束,进入稳定状态.在实际工程中,时间 t 不可能是无限长,我们称 $\tau=RC$ 为时间常数.它是表征过渡过程时间长短的一个物理量,一般当 $t=3\tau$ 时,就认为过渡过程结束,进入稳定状态.

例 7 在 RLC 电路中串接直流电源 E(如图 2-13 所示),求回路中电流 $i(t)$.

解 根据 Kirchhoff 定律,有

$$u_C+u_R+u_L=E,$$

其中

$$u_R=Ri(t),\ i(t)=C\frac{du_C}{dt},$$

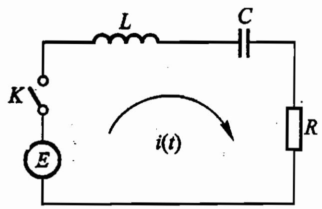


图 2－13

即
$$u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t.$$

而 $u_L=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$. 代入上式，可得
$$\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t+Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)=E, i(0)=0.$$

这是 RLC 串联电路中电流 $i(t)$ 所满足的关系式，它是一个微分积分方程. 对该方程两边取 Laplace 变换，且设 $\mathscr{L}[i(t)]=I(s)$，则有
$$\frac{1}{Cs}I(s)+RI(s)+LsI(s)=\mathscr{L}[E]=\frac{E}{s}.$$

所以
$$I(s)=\frac{\mathscr{L}[E]}{Ls+R+\frac{1}{Cs}}.$$

若用 r_1 和 r_2 表示方程 $s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$ 的根，则有
$$r_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}, r_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}.$$

我们记
$$\alpha=\frac{R}{2L}, \beta=\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{LC}},$$

则可写

$$r_1=-\alpha+\beta,$$
$$r_2=-\alpha-\beta.$$

所以
$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=(s-r_1)(s-r_2),$$

故
$$I(s)=\frac{E}{L(s-r_1)(s-r_2)}.$$

根据 Heaviside 展开式，可求得电流为
$$i(t)=\frac{E}{L}\left[\frac{e^{r_1 t}}{r_1-r_2}+\frac{e^{r_2 t}}{r_2-r_1}\right]=\frac{E}{L}\cdot\frac{e^{r_1 t}-e^{r_2 t}}{r_1-r_2}.$$

将 r_1, r_2 的数值代入得
$$i(t)=\frac{Ee^{-\alpha t}(e^{\beta t}-e^{-\beta t})}{2\beta L}=\frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh\beta t.$$

当 $\alpha^2>\frac{1}{LC}$，即 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，β 为一实数，此时可直接由上式计算 $i(t)$.

当 $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，β 为一虚数，上式可作如下的变换，令
$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2},$$

此时
$$\beta=\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{LC}}=\mathrm{j}\omega.$$

考虑到
$$\sinh \mathrm{j}z=\mathrm{j}\sin z,$$

此时，$i(t)$ 可写成
$$i(t)=\frac{E}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin\omega t.$$

该式表明在回路中出现了角频率为 ω 的衰减正弦振荡.

当 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，即在临界情况下，此时 $\beta=0, r_1=r_2=-\alpha$，有

$$I(s)=\frac{E}{L(s-r_1)(s-r_2)}=\frac{E}{L(s+\alpha)^2},$$

根据 Heaviside 展开式，$s=-\alpha$ 为二级极点. 容易求得

$$i(t)=\frac{E}{L}te^{-\alpha t}.$$

注意，本例中的微分积分方程的初值问题，实际上可以转化为一个二阶线性常系数齐次微分方程的初值问题，有兴趣的读者可以一试.

例 8　求方程组

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=e^t-2, \\ 2y''-x''-2y'+x=-t \end{cases}$$

满足初始条件

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=0, \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$$

的解.

解　这是一个常系数微分方程组的初值问题. 对方程组的两个方程两边取 Laplace 变换，设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$. 并考虑到初始条件，则得

$$\begin{cases} s^2Y(s)-s^2X(s)+sX(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s}, \\ 2s^2Y(s)-s^2X(s)-2sY(s)+X(s)=-\dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

整理化简后为

$$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{-s+2}{s(s-1)^2}, \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)}. \end{cases}$$

解这个代数方程组，即得

$$\begin{cases} Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}, \\ X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}. \end{cases}$$

现根据 § 2.3 的 Heaviside 展开式来求它们的逆变换.

对于 $Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$，根据 § 2.3 的例 2 可得

$$y(t)=1+te^t-e^t.$$

$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$ 具有两个二级极点：$s=0, s=1$.

所以

$$\begin{aligned} x(t)&=\lim_{s\to0}\frac{d}{ds}\left[\frac{2s-1}{(s-1)^2}e^{st}\right]+\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[\frac{2s-1}{s^2}e^{st}\right] \\ &=\lim_{s\to0}\left[te^{st}\frac{2s-1}{(s-1)^2}-\frac{2s}{(s-1)^3}e^{st}\right] \\ &\quad+\lim_{s\to1}\left[te^{st}\frac{2s-1}{s^2}+e^{st}\frac{2(1-s)}{s^3}\right] \\ &=-t+te^t. \end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} y(t)=1-e^t+te^t, \\ x(t)=-t+te^t. \end{cases}$$

这便是所求方程组的解.

对于某些变系数微分方程组以及微分积分方程组的初值问题的求解，将作为练习放在习题中.

从以上的例题可以看出，用 Laplace 变换求线性微分、积分方程及其方程组的解时，有如下的优点：

(1) 在求解的过程中，初始条件也同时用上了，求出的结果就是需要的特解. 这样就避免了微分方程的一般解法中，先求通解再根据初始条件确定任意常数求出特解的复杂运算.

(2) 零初始条件在工程技术中是十分常见的，由第一个优点可知，用 Laplace 变换求解就显得更加简单，而在微分方程的一般解法中不会因此而有任何简化.

(3) 对于一个非齐次的线性微分方程来说，当非齐次项(如例 5 中的 $f(t)$)不是连续函数，而是包含 δ－函数或有第一类间断点的函数时，用 Laplace 变换求解没有任何困难，而用微分方程的一般解法就会困难得多.

(4) 用 Laplace 变换求解线性微分、积分方程组时，不仅比微分方程组的一般解法要简便得多，而且可以单独求出某一个未知函数，而不需要知道其余的未知函数，这在微分方程组的一般解法中通常是不可能的.

此外，用 Laplace 变换方法求解的步骤明确、规范，便于在工程技术中应用，而且有现成的 Laplace 变换表，可直接获得象原函数(即方程的解). 正由于这些优点，Laplace 变换在许多工程技术领域中有着广泛的应用.

利用 Laplace 变换的延迟性质，还可以求微分、差分方程的解. 限于篇幅，这里不再介绍. 下面我们将专门列出一小节来介绍某些偏微分方程的 Laplace 变换解法.

2*. 偏微分方程的 Laplace 变换解法

Laplace 变换也是求解某些偏微分方程的方法之一，其计算过程和步骤与求解上述各类线性方程及用 Fourier 变换求解偏微分方程的过程及步骤相似. 本小节也主要针对线性偏微分方程中的未知函数是二元函数的情形. 为方便起见，假定二元函数 $u(x,t)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 关于 x 取 Laplace 变换或 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 关于 t 取 Laplace 变换都允许(偏)导数运算与积分运算交换次序. 在解题时，不再说明.

例 9 (半有界弦振动方程的混合问题)利用 Laplace 变换求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},(x>0,t>0),\\ u|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0,\\ u|_{x=0}=\varphi(t),\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0.\end{cases}$$

解 对定解问题关于 t 取 Laplace 变换，记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}[\varphi(t)]=\Phi(s),$$

并利用 Laplace 变换的微分性质及初始条件，可得

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=s^2U(x,s)-su(x,0)-\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=s^2U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-st}dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{+\infty}u(x,t)e^{-st}dt=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s),$$

$$\mathscr{L}[u(0,t)]=U(0,s)=\Phi(s),$$

$$\lim_{x\to+\infty}U(x,s)=0^{①}.$$

这样，求解原定解问题转化为求解含有参数 s 的常微分方程的边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dx^2}U(x,s)-\dfrac{s^2}{a^2}U(x,s)=0,\\ U(0,s)=\Phi(s),\ \lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=0.\end{cases}$$

这里，方程是 $U(x,s)$ 关于 x 的一个二阶常系数齐次线性微分方程，我们很容易得到该方程的通解为

① 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0$ 可知，当 x 充分大时，对任给的正数 ε，对一切 $t>0$，有 $|u(x,t)-0|=|u(x,t)|<\varepsilon$，所以
$|U(x,s)-0|=\left|\int_0^{+\infty}u(x,t)e^{-st}dt\right|\leqslant\varepsilon\int_0^{+\infty}|e^{-st}|dt=\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(s)}$，$(\mathrm{Re}(s)>0)$. 从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=0$.

$$U(x,s)=c_1 e^{-\frac{s}{a}x}+c_2 e^{\frac{s}{a}x}.$$

由其边界条件可得

$$c_1=\Phi(s),\quad c_2=0.$$

从而

$$U(x,s)=\Phi(s)e^{-\frac{s}{a}x}.$$

对上式取 Laplace 逆变换,且利用延迟性质,从而获得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]\\&=\mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)e^{-\frac{x}{a}s}]\\&=\begin{cases}0, & t<\dfrac{x}{a},\\ \varphi\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}\end{aligned}$$

从例 9 求解的过程可以看出,用 Laplace 变换求解偏微分方程类似于用 Fourier 变换求解偏微分方程的三个步骤,即先将定解问题中的未知函数看作某一个自变量的函数,对方程及定解条件关于该自变量取 Laplace 变换,把偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题;再根据这个常微分方程和相应的定解条件,求出象函数;然后再取 Laplace 逆变换,得到原定解问题的解.

例 10 (半有界杆热传导方程的混合问题)利用 Laplace 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x>0,t>0),\\ u|_{t=0}=u_0,\\ u|_{x=0}=u_1, & \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=u_0,\end{cases}$$

其中 u_0,u_1 均为常数.

解 对定解问题关于 t 取 Laplace 变换,并利用微分性质及初始条件可得

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=sU(x,s)-u(x,0)=sU-u_0,$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s).$$

这样,求解原定解问题转化为求解含有参数 s 的常微分方程的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U}{dx^2}-\dfrac{s}{a^2}U=-\dfrac{u_0}{a^2},\\ U(0,s)=\dfrac{u_1}{s},\ \lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=\dfrac{u_0}{s}.\end{cases}$$

这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程的边值问题,我们容易求得该方程的通解为

$$U(x,s)=c_1e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}+c_2e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}+\frac{u_0}{s}.$$

由边界条件可知

$$c_1=0,\quad c_2=\frac{1}{s}(u_1-u_0),$$

从而

$$U(x,s)=\frac{u_0}{s}+\frac{u_1-u_0}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}.$$

对上式取 Laplace 逆变换,并根据附录Ⅱ中公式(62),原定解问题的解为

$$u(x,t)=u_0+(u_1-u_0)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

其中 $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau$ 称为余误差函数.

值得一提的是,对于 $u=u(x,t)$,x,t 的变化范围都是 $(0,+\infty)$,我们是否可以将此定解问题关于 x 取 Laplace 变换呢?

实际上，我们从 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 关于 x 的 Laplace 变换就可以看出，设 $\mathscr{L}[u(x,t)]=U(s,t)$，则由微分性质可知

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=s^2U(s,t)-su\Big|_{x=0}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}.$$

这里 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}$ 是未知的，上式不能确定，从而原定解问题中的方程关于 x 取 Laplace 变换后得到的关于 $U(s,t)$ 的方程也是不确定的. 因此，本例题不能对 x 取 Laplace 变换. 这就告诉我们，由二元函数 $u=u(x,t)$ 所构成的定解问题，是关于 x 还是关于 t 取 Laplace 变换，不仅要看 x 和 t 的变化范围(定义域)，还要考虑定解问题中给出的定解条件. 类似地，例 9 给出的定解问题也不能关于 x 取 Laplace 变换. 读者可试之.

例 11 利用 Laplace 变换求解定解问题：

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1,(x>0,y>0)\\ u|_{x=0}=y+1,\\ u|_{y=0}=1.\end{cases}$$

解 设二元函数 $u=u(x,y)$，这里 x,y 的变化范围都是 $(0,+\infty)$，现在将定解问题关于 x 取 Laplace 变换，记

$$\mathscr{L}[u(x,y)]=U(s,y),$$

由微分性质及已知条件 $u|_{x=0}=y+1$ 可以推出 $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=0}=1$，从而

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]=\mathscr{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=s\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]-\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=0}$$

$$=s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}U(s,y)-1.$$

这样，原定解问题转化为含有参数 s 的一阶常系数线性微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s},\\ U|_{y=0}=\frac{1}{s}.\end{cases}$$

该方程满足初始条件的解很容易得到，即

$$U(s,y)=\frac{1}{s^2}y+\frac{1}{s}y+\frac{1}{s},$$

取其逆变换，可得原定解问题的解为

$$u(x,y)=xy+y+1.$$

本例题的定解问题也可以关于 y 取 Laplace 变换，其结果完全一样. 读者不妨自己计算一下.

例 12 利用 Laplace 变换求解定解问题：

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},(0<x<l,t>0)\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=6\sin\frac{\pi x}{2}\end{cases}$$

解 实际上，这是一个有界杆热传导方程的混合问题. 由于 x 的变化范围是 $(0,l)$，而 t 的变化范围是 $(0,+\infty)$. 因此该定解问题应当关于 t 取 Laplace 变换. 记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=sU(x,s)-u\Big|_{t=0}=sU-6\sin\frac{\pi x}{2}.$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U(x,s).$$

这样，原定解问题转化为含有参数 s 的二阶常系数线性微分方程的边值问题

$$\begin{cases}a^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-sU=-6\sin\frac{\pi x}{2},\\ U|_{x=0}=0,U|_{x=l}=0.\end{cases}$$

由二阶常系数线性微分方程的一般解法可得其通解为

$$U(x,s)=c_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}+c_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}+\frac{6}{s+\frac{a^2\pi^2}{4}}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

由边界条件可知 $c_1=c_2=0$,从而

$$U(x,s)=\frac{6}{s+\frac{a^2\pi^2}{4}}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

对上式取其逆变换,则原定解问题的解为

$$u(x,t)=6e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}t}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

例 13 (半有界杆热传导方程的混合问题)利用 Laplace 变换求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0<x<+\infty,t>0),\\ u|_{x=0}=\varphi(t),\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 这是 §1.5 中给出的例 8,那里采用 Fourier 正弦变换的方法求得了该定解问题的解. 现在我们将用 Laplace 变换的方法求该定解问题的解. 对二元函数 $u=u(x,t)$ 来说,尽管 x,t 的变化范围都是 $(0,+\infty)$,出于在例 10 中阐述的理由,该定解问题只能关于 t 取 Laplace 变换. 记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=sU(x,s)-u|_{t=0}=sU,$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s),$$

$$\mathscr{L}[\varphi(t)]=\Phi(s).$$

由半有界杆热传导方程的物理意义可知,当 $x\to+\infty$,有 $u(x,t)\to 0$,从而也有 $U(x,s)\to 0$,这样,原定解问题可转化为二阶常系数线性齐次微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U}{dx^2}-\dfrac{s}{a^2}U=0,\\ U|_{x=0}=\Phi(s).\end{cases}$$

该齐次方程的通解为

$$U(x,s)=c_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}+c_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x},$$

根据边界条件 $U|_{x=0}=\Phi(s)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)=0$,可得

$$c_1=0,c_2=\Phi(s),$$

因此

$$U(x,s)=\Phi(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}=\Phi(s)e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}},$$

从而原定解问题的解为

$$u(x,t)=\varphi(t)*\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}].$$

为了求得 $\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}]$,根据附录Ⅱ中的公式(62),有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}\right]=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau.$$

由题意知 x,t 均为正常数. 所以,$x\to+\infty$ 时,

$$\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau\to 0$$

等价于 $t\to 0$ 时,

$$\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau\to 0.$$

如果记 $f(t)=\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau$,则

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}},$$

由微分性质：$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$，即

$$sF(s)=\mathscr{L}[f'(t)]+f(0)$$

其中

$$f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)=0.$$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}[sF(s)]=f'(t).$$

因此

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}]=\mathscr{L}^{-1}\left[s\left(\frac{1}{s}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}\right)\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau\right]$$

$$=\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

从而

$$u(x,t)=\varphi(t)*\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}]$$

$$=\varphi(t)*\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\xi)}}d\xi.$$

这与 §1.5 中的例 8 结果完全一样.

以上我们介绍了利用 Fourier 变换方法和 Laplace 变换方法来求解微分方程. 用这两种变换方法求微分、积分方程，只要根据自变量的变化范围是$(-\infty,+\infty)$还是$(0,+\infty)$，按示意图 1-16 的三个步骤进行，不难获得结果. 但用这两种变换方法来求解偏微分方程，尽管其解题步骤与示意图 1-16 的三个步骤大体相似，但必须判断使用哪一种变换方法及对哪一个自变量取相应的变换. 这里，我们在 §1.5 例 5 和 §2.5 例 9 后小结的基础上，再作如下的说明.

对于一个线性偏微分方程的定解问题，一般来说，要根据自变量的变化范围和方程及其定解条件的具体情况来决定选取变换方法. 就本书所介绍的内容而言，首先，如果自变量的变化范围为$(-\infty,+\infty)$，应选取 Fourier 变换方法；如果自变量的变化范围为$(0,+\infty)$，则应选取 Laplace 变换方法，亦可选取 Fourier 正弦变换或余弦变换方法. 其次，要考虑定解条件的形式，如果对未知函数 $u(x,t)$ 形成的定解问题关于自变量 t 取 Laplace 变换，根据 Laplace 变换的微分性质，必须在定解条件中给出该自变量为零时的未知函数值及直到低于方程阶数的各阶导数值，以二阶线性偏微分方程为例，必须给出 $u(x,t)|_{t=0}$ 及 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$ 的值，否则变换后的象函数的方程是不确定的(如 §2.5 中的例 9 和例 10，而例 11 对两个自变量都可以取 Laplace 变换来求解)；对于某自变量取 Fourier 正弦变换时，则要求定解条件中应给出该自变量为零时的未知函数值，对于某自变量取 Fourier 余弦变换时，则要求定解条件中应给出该自变量为零时的未知函数的导数值，否则变换后的象函数的方程也是不确定的(如 §1.5 中的例 8 和例 9). 因此，对自变量的变化范围为$(0,+\infty)$的定解问题有可能既可以取 Fourier 正弦或余弦变换，又可以取 Laplace 变换来求解(实际上，§1.5 的例 8 和 §2.5 的例 13 是同一个例题). 再则，对方程取某种变换时没有用到的定解条件都要取相应的变换，使它成为象函数方程的定解条件. 最后，将变换成的常微分方程的定解问题求出其象函数，再通过取其逆变换而求得原定解问题的解. 当然，求逆变换有一定的技巧，可以查积分变换表，也可以利用有关的性质和定理获得结果. 同样，引进多元函数的 Laplace 变换的概念，我们就可以用 Laplace 变换去求解某些多维的偏微分方程的定解问题. 限于篇幅，这里不再介绍了. 有关使用积分变换方法来求解微分方程的

其它内容，有兴趣的读者可参看有关的书籍.

3.* 线性系统的传递函数

(1) 线性系统的激励和响应

我们已经知道，一个线性系统可以用一个常系数线性微分方程来描述. 如例 6 中 RC 串联电路，电容器两端的电压 $u_C(t)$ 所满足的关系式为

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=e(t).$$

这是一个一阶常系数线性微分方程. 我们通常将外加电动势 $e(t)$ 看成是这个系统(即 RC 电路)的随时间 t 变化的输入函数，称为**激励**，而把电容器两端的电压 $u_C(t)$ 看成是这个系统的随时间 t 变化的输出函数，称为**响应**. 这样 RC 串联的闭合回路，就可以看成是一个有输入端和输出端的线性系统，如图 2－14 所示. 而虚线框中的电路结构决定于系统内的元件参量和连接方式. 这样一个线性系统，在电路理论中又称为线性网络(简称网络). 一个系统的响应是由激励函数与系统本身的特征(包括元件的参量和连接方式)所决定. 对于不同的线性系统，即使在同一激励下，其响应也是不同的.

在分析线性系统时，我们并不关心系统内部的各种不同的结构情况，而是要研究激励和响应同系统本身特性之间的联系，可用图 2－15 所示的情况表明它们之间的联系. 为了描述这种联系需要引进传递函数的概念.

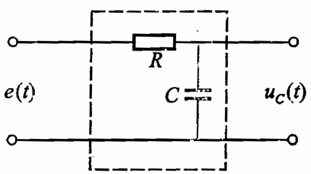


图 2－14

图 2－15

(2) 传递函数的概念

假设有一个线性系统，在一般情况下，它的激励 $x(t)$ 与响应 $y(t)$ 所满足的关系，可用下列微分方程来表示：

$$\begin{aligned}&a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1y'+a_0y\\&=b_mx^{(m)}+b_{m-1}x^{(m-1)}+b_{m-2}x^{(m-2)}+\cdots+b_1x'+b_0x,\end{aligned}\tag{2.22}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,b_0,b_1,\cdots,b_m$ 均为常数，m,n 为正整数，$n\geqslant m$.

设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$，根据 Laplace 变换的微分性质，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[a_ky^{(k)}]=&a_ks^kY(s)-a_k[s^{k-1}y(0)+s^{k-2}y'(0)\\&+s^{k-3}y''(0)+\cdots+y^{(k-1)}(0)]\\&(k=0,1,2,\cdots,n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[b_kx^{(k)}]=&b_ks^kX(s)-b_k[s^{k-1}x(0)+s^{k-2}x'(0)+s^{k-3}x''(0)\\&+\cdots+x^{(k-1)}(0)]\qquad(k=0,1,2,\cdots,m).\end{aligned}$$

对(2.22)式两边取 Laplace 变换并通过整理，可得

$$D(s)Y(s)-M_{hy}(s)=M(s)X(s)-M_{hx}(s),$$

即

$$Y(s)=\frac{M(s)}{D(s)}X(s)+\frac{M_{hy}(s)-M_{hx}(s)}{D(s)},\tag{2.23}$$

其中

$$D(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0,$$

$$M(s)=b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0,$$

$$\begin{aligned}M_{hy}(s)=&a_ny(0)s^{n-1}+[a_ny'(0)+a_{n-1}y(0)]s^{n-2}+\\&\cdots+[a_ny^{(n-1)}(0)+\cdots+a_2y'(0)+a_1y(0)],\end{aligned}$$

$$M_{hx}(s)=b_mx(0)s^{m-1}+[b_mx'(0)+b_{m-1}x(0)]s^{m-2}+$$

$$\cdots+[b_m x^{(m-1)}(0)+\cdots+b_2x'(0)+b_1x(0)].$$

若令 $G(s)=\dfrac{M(s)}{D(s)}, G_h(s)=\dfrac{M_{hy}(s)-M_{hx}(s)}{D(s)}$，则(2.23)式可写成

$$Y(s)=G(s)X(s)+G_h(s), \qquad (2.24)$$

式中

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}. \qquad (2.25)$$

我们称 $G(s)$ 为**系统的传递函数**. 它表达了系统本身的特性，而与激励及系统的初始状态无关. 但 $G_h(s)$ 则由激励和系统本身的初始条件所决定. 若这些初始条件全为零，即 $G_h(s)=0$ 时，(2.24)式可写成

$$Y(s)=G(s)X(s) \text{或} G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}. \qquad (2.26)$$

此式表明，在零初始条件下，系统的传递函数等于其响应的 Laplace 变换与其激励的 Laplace 变换之比. 当我们知道了系统的传递函数以后，就可以由系统的激励按(2.24)或(2.26)式求出其响应的 Laplace 变换，再通过求逆变换可得其响应 $y(t)$. 而 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的关系可用图 2-16 表示出来

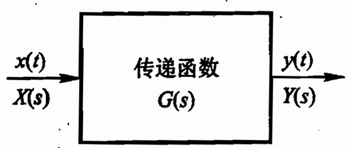


图 2-16

此外，传递函数不表明系统的物理性质. 许多性质不同的物理系统，可以有相同的传递函数，而传递函数不相同的物理系统，即使系统的激励相同，其响应也是不相同的，因此对传递函数的分析研究，就能统一处理各种物理性质不同的线性系统.

(3) 脉冲响应函数

假设某个线性系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

或

$$Y(s)=G(s)X(s),$$

若以 $g(t)$ 表示 $G(s)$ 的 Laplace 逆变换式，即

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)],$$

则根据(2.26)式和 Laplace 变换的卷积定理可得

$$y(t)=g(t)*x(t)=\int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

即系统的响应等于其激励与 $g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ 的卷积.

由此可见，一个线性系统除用传递函数来表征外，也可以用传递函数的逆变换 $g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ 来表征. 我们称 $g(t)$ 为**系统的脉冲响应函数**. 它的物理意义可以这样解释，当激励是一个单位脉冲函数，即 $x(t)=\delta(t)$ 时，则在零初始条件下，有

$$\mathscr{L}[x(t)]=\mathscr{L}[\delta(t)]$$
$$=X(s)=1,$$

所以

$$Y(s)=G(s),$$

即

$$y(t)=g(t).$$

可见，脉冲响应函数 $g(t)$，就是在零初始条件下，激励为 $\delta(t)$ 时的响应 $y(t)$，也就是传递函数的逆变换，如图 2-17 所示.

(4) 频率响应

在系统的传递函数中，令 $s=\mathrm{j}\omega$，则得

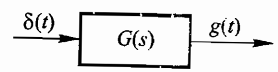


图 2-17

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}$$

$$=\frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m+b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1}+b_{m-2}(\mathrm{j}\omega)^{m-2}+\cdots+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n+a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1}+a_{n-2}(\mathrm{j}\omega)^{n-2}+\cdots+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0}.$$

我们称它为**系统的频率特性函数**,简称为频率响应.可以证明,当激励是角频率为 ω 的虚指数函数(也称为复正弦函数)$x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 时,系统的稳态响应是 $y(t)=G(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.因此频率响应在工程技术中又称为**正弦传递函数**.

总之,任何线性系统的正弦传递函数都可由该系统的传递函数中的 s 以 $\mathrm{j}\omega$ 来代替求得.

系统的传递函数、脉冲响应函数、频率响应是表征线性系统的几个重要概念.下面我们将说明它们的求法.

例 14 如图 2-14 所示的 RC 串联电路,当电源电势 $e(t)$ 看成是电路的激励,则其响应(电容器两端的电压)$u_C(t)$ 与 $e(t)$ 所满足的微分方程式为

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)+u_C(t)=e(t),$$

两边取 Laplace 变换,且 $\mathscr{L}[u_C(t)]=U_C(s)$,$\mathscr{L}[e(t)]=E(s)$,有

$$RC[sU_C(s)-u_C(0)]+U_C(s)=E(s),$$

所以
$$U_C(s)=\frac{E(s)}{RCs+1}+\frac{RCu_C(0)}{RCs+1}.$$

按传递函数的定义,此电路的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{RC\left(s+\frac{1}{RC}\right)},$$

而电路的脉冲响应函数就是传递函数的 Laplace 逆变换,即

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{RC\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\right]=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

在传递函数 $G(s)$ 中,令 $s=\mathrm{j}\omega$,可得频率响应为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{RC\mathrm{j}\omega+1}.$$

关于传递函数的更深入的内容,将在有关的专业课程中进行讨论,这里不再叙述了.

习 题 五

1. 求下列常系数微分方程的解:

(1) $y'-y=\mathrm{e}^{2t}, y(0)=0$;

(2) $y''+4y'+3y=\mathrm{e}^{-t}, y(0)=y'(0)=1$;

(3) $y''+3y'+2y=u(t-1), y(0)=0, y'(0)=1$;

(4) $y''-2y'+2y=2\mathrm{e}^t\cos t, y(0)=y'(0)=0$;

(5) $y''+2y'+5y=\mathrm{e}^{-t}\sin t, y(0)=0, y'(0)=1$;

(6) $y''-y=4\sin t+5\cos 2t, y(0)=-1, y'(0)=-2$;

(7) $y''+4y'+5y=h(t), y(0)=c_1, y'(0)=c_2$($c_1, c_2$ 为常数);

(8) $y'''+3y''+3y'+y=1, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(9) $y'''+y'=\mathrm{e}^{2t}, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(10) $y'''+3y''+3y'+y=6\mathrm{e}^{-t}, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(11) $y'''-3y''+3y'-y=t^2\mathrm{e}^t, y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=-2$;

(12) $y^{(4)}+2y''+y=0, y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=1$;

(13) $y^{(4)}+y'''=\cos t+\frac{1}{2}\delta(t), y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=c_0$(常数);

(14) $y''-2y'+y=0, y(0)=0, y(1)=2$;

(15) $y''-y=0, y(0)=0, y(2\pi)=1$;

(16) $y''+y=10\sin 2t, y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

2. 求下列变系数微分方程的解:

(1) $ty''+y'+4ty=0, y(0)=3, y'(0)=0$;

(2) $ty''+2y'+ty=0, y(0)=1, y'(0)=c_0$,($c_0$ 为常数);

(3) $ty''+2(t-1)y'+(t-2)y=0, y(0)=2$;

(4) $ty''+(t-1)y'-y=0, y(0)=5, y'(+\infty)=0$;

(5) $ty''+(1-n)y'+y=0, y(0)=y'(0)=0$,($n\geqslant 0$);

(6) $ty''+(1-n-t)y'+ny=t-1,(n=2,3,\cdots),y(0)=0.$

3. 求下列积分方程的解：

(1) $y(t)=at+\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau$；

(2) $y(t)=\mathrm{e}^{-t}-\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau$；

(3) $\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=16\sin 4t$；

(4) $y(t)+\int_0^t y(t-\tau)\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau=2t-3$；

(5) $\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=t^2\mathrm{e}^{-t}$；

(6) $y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$

4. 求下列微分积分方程的解：

(1) $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=y'(t),y(0)=1$；

(2) $y'(t)+\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=1,y(0)=0$；

(3) $y'(t)+2y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t-b),y(0)=-2$；

(4) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=10\mathrm{e}^{-3t},y(0)=0$；

(5) $y'(t)-4y(t)+4\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{3}t^3,y(0)=0$；

(6) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=2[u(t-1)-u(t-2)],y(0)=1.$

5. 求下列微分、积分方程组的解：

(1) $\begin{cases}x'+x-y=\mathrm{e}^t,\\ y'+3x-2y=2\mathrm{e}^t,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=1$；

(2) $\begin{cases}y'-2z'=f(t),\\ y''-z''+z=0,\end{cases}\quad y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0$；

(3) $\begin{cases}(2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0,x(0)=x'(0)=1,\\ (2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0,y(0)=y'(0)=0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x''-x+y+z=0,\\ x+y''-y+z=0,x(0)=1,y(0)=z(0)=x'(0)=y'(0)\\ x+y+z''-z=0,\qquad\qquad =z'(0)=0;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}ty+z+tz'=(t-1)\mathrm{e}^{-t},\\ y'-z=\mathrm{e}^{-t},\end{cases}\quad y(0)=1,z(0)=-1$；

(6) $\begin{cases}-3y''+3z''=t\mathrm{e}^{-t}-3\cos t,\\ ty''-z'=\sin t,\end{cases}\quad y(0)=-1,y'(0)=2,z(0)=4,z''(0)=0$；

(7) $\begin{cases}y''+2y+\int_0^t z(\tau)\mathrm{d}\tau=t,\\ y''+2y'+z=\sin 2t,\end{cases}\quad y(0)=1,y'(0)=-1$；

(8) $\begin{cases}x''+2x'+\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\\ 4x''-x'+y=\mathrm{e}^{-t},\end{cases}\quad x(0)=0,x'(0)=-1.$

6. 求下列线性偏微分方程的定解问题的解：

(1) $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g,(g\text{ 为常数}),(x>0,t>0),\\ u|_{t=0}=0,\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0,\\ u|_{x=0}=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-hu,(h\text{ 为常数}),(x>0,t>0),\\ u|_{x=0}=u_0(\text{常数}),\\ u|_{t=0}=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y,(0<x,y<+\infty),\\ u|_{y=0}=x^2,\\ u|_{x=0}=3y;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a^2u+\varphi(x),(x>0,y>0),\\ u|_{x=0}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\\ \lim\limits_{y\to+\infty}u(x,y)<+\infty;\end{cases}$

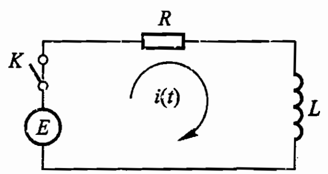
(5) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}=0,(x>0,t>0), \\ u\big|_{x=0}=\psi(t), \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x), \psi(0)=\varphi(0)=0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},(0<x<l,t>0), \\ u\big|_{x=0}=0, u\big|_{x=l}=\varphi(t), \\ u\big|_{t=0}=0, \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \end{cases}$

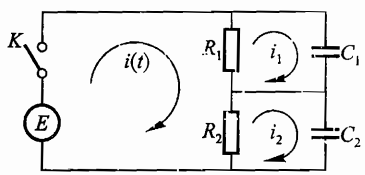
7. 设在原点处质量为 m 的一质点在 $t=0$ 时在 x 方向上受到了冲击力 $k\delta(t)$ 的作用，其中 k 为常数，假定质点的初速度为零，求其运动规律.

8. 设有如图所示的 RL 串联电路，在 $t=t_0$ 时，将电路接上直流电源 E，求电路中的电流 $i(t)$.

9. 如图所示的电路，在 $t=0$ 时接入直流电源 E，求回路中电流 $i(t)$.



（第 8 题）



（第 9 题）

10. 某系统的传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$，求在稳态情况下，当激励 $x(t)=A\sin \omega t$ 时的系统响应 $y(t)$，其中 K,T,A 均为常数.

11. 某系统的激励 $x(t)=\sin t$，当系统的响应 $y(t)=\mathrm{e}^{-t}-\cos t+\sin t$ 时，求

(1) 系统的传递函数 $G(s)$；

(2) 系统的脉冲响应函数 $g(t)$；

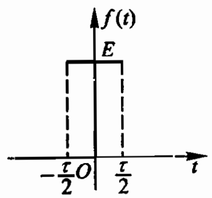
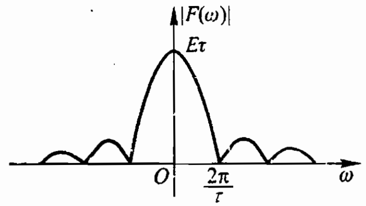
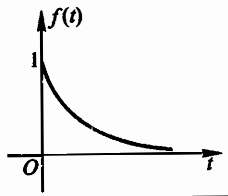
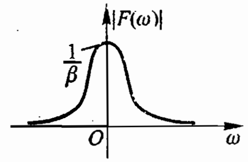
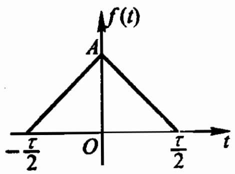
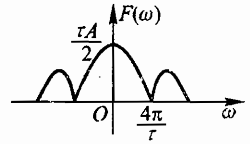
(3) 系统的频率响应函数 $G(\mathrm{j}\omega)$.

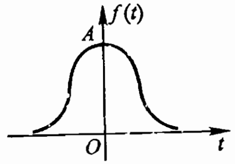
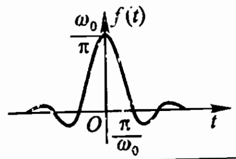
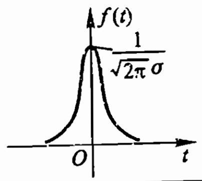
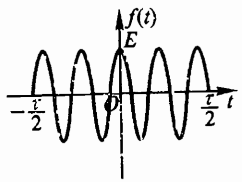
12. 设系统Ⅰ和系统Ⅱ串联，它们分别具有传递函数 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$，而系统Ⅰ的响应 $y(t)$ 为系统Ⅱ的激励. 已知

$$G_1(s)=\mathrm{e}^{-s}, y(t)=\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2).$$

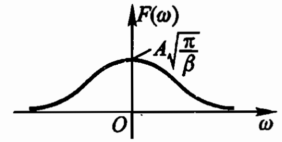
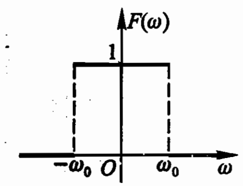
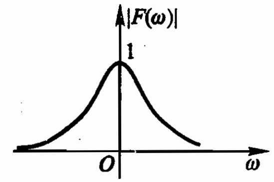
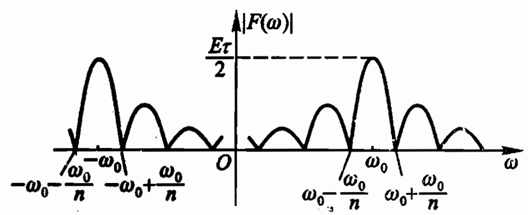
求该串联系统的响应 $z(t)=(t-2)^2y(t)$ 时的串联系统的激励 $x(t)$.

附录 I　Fourier 变换简表

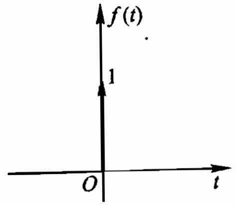
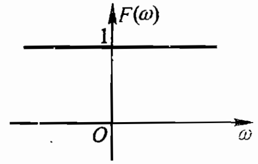
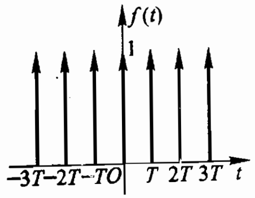
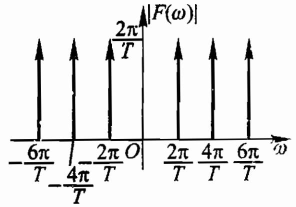
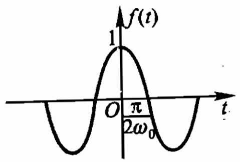
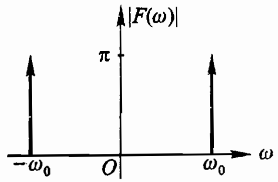
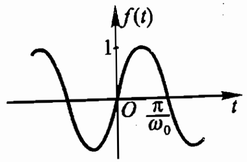
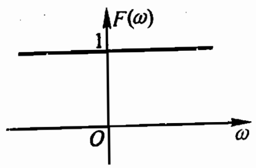
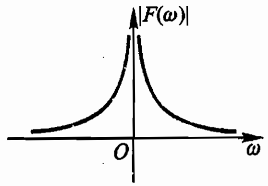
	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　数	图　像	频　谱	图　像
1	矩形单脉冲 $f(t)=\begin{cases}E, \lvert t\rvert\leqslant\frac{\tau}{2},\\ 0, 其他\end{cases}$		$2E\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$	
2	指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0(\beta>0)\end{cases}$		$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$	
3	三角形脉冲 $f(t)=\begin{cases}\frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}+t\right), \\ -\frac{\tau}{2}\leqslant t<0, \\ \frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}-t\right), \\ 0\leqslant t<\frac{\tau}{2}\end{cases}$		$\dfrac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$	

	$f(t)$	
	函 数	图 像
4	钟形脉冲 $f(t)=Ae^{-\beta t^2}\ (\beta>0)$	
5	Fourier 核 $f(t)=\dfrac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$	
6	Gauss 分布函数 $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	
7	矩形射频脉冲 $f(t)=\begin{cases}E\cos\omega_0 t, & \lvert t\rvert\leqslant\frac{\tau}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	

续表

$F(\omega)$	
频 谱	图 像
$\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$	
$F(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert\leqslant\omega_0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	
$\dfrac{E\tau}{2}\left[\dfrac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega-\omega_1)\frac{\tau}{2}}+\dfrac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}\right]$	

续表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　数	图　像	频　谱	图　像
8	单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)$		1	
9	周期性脉冲函数 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$ （T 为脉冲函数的周期）		$\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2n\pi}{T}\right)$	
10	$f(t)=\cos\omega_0 t$		$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	
11	$f(t)=\sin\omega_0 t$		$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	同上图
12	单位函数 $f(t)=u(t)$		$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$	

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
13	$u(t-c)$	$\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega c}+\pi\delta(\omega)$
14	$u(t)\cdot t$	$-\frac{1}{\omega^2}+\pi j\delta'(\omega)$
15	$u(t)\cdot t^n$	$\frac{n!}{(j\omega)^{n+1}}+\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
16	$u(t)\sin at$	$\frac{a}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
17	$u(t)\cos at$	$\frac{j\omega}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
18	$u(t)e^{jat}$	$\frac{1}{j(\omega-a)}+\pi\delta(\omega-a)$
19	$u(t-c)e^{jat}$	$\frac{1}{j(\omega-a)}e^{-j(\omega-a)c}+\pi\delta(\omega-a)$
20	$u(t)e^{jat}t^n$	$\frac{n!}{[j(\omega-a)]^{n+1}}+\pi j^n\delta^{(n)}(\omega-a)$
21	$e^{a\|t\|}$, $\mathrm{Re}(a)<0$	$\frac{-2a}{\omega^2+a^2}$
22	$\delta(t-c)$	$e^{-j\omega c}$
23	$\delta'(t)$	$j\omega$
24	$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
25	$\delta^{(n)}(t-c)$	$(j\omega)^n e^{-j\omega c}$
26	1	$2\pi\delta(\omega)$
27	t	$2\pi j\delta'(\omega)$
28	t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
29	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
30	$t^n e^{jat}$	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega-a)$
31	$\frac{1}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$	$-\frac{\pi}{a}e^{a\|\omega\|}$
32	$\frac{t}{(a^2+t^2)^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$	$\frac{j\omega\pi}{2a}e^{a\|\omega\|}$
33	$\frac{e^{jbt}}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{a}e^{a\|\omega-b\|}$
34	$\frac{\cos bt}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{2a}[e^{a\|\omega-b\|}+e^{a\|\omega+b\|}]$
35	$\frac{\sin bt}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\frac{\pi}{2aj}[e^{a\|\omega-b\|}-e^{a\|\omega+b\|}]$
36	$\frac{\sinh at}{\sinh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$\frac{\sin a}{\cosh\omega+\cos a}$
37	$\frac{\sinh at}{\cosh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$-2j\frac{\sin\frac{a}{2}\sinh\frac{\omega}{2}}{\cosh\omega+\cos a}$
38	$\frac{\cosh at}{\cosh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$2\frac{\cos\frac{a}{2}\cosh\frac{\omega}{2}}{\cosh\omega+\cos a}$
39	$\frac{1}{\cosh at}$	$\frac{\pi}{a}\frac{1}{\cosh\frac{\pi\omega}{2a}}$
40	$\sin at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right)$
41	$\cos at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
42	$\frac{1}{t}\sin at$	$\begin{cases}\pi, & \lvert\omega\rvert\leqslant a\\ 0, & \lvert\omega\rvert>a\end{cases}$
43	$\frac{1}{t^2}\sin^2 at$	$\begin{cases}\pi\left(a-\frac{\lvert\omega\rvert}{2}\right), & \lvert\omega\rvert\leqslant 2a\\ 0, & \lvert\omega\rvert>2a\end{cases}$
44	$\frac{\sin at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\mathrm{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}-\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
45	$\frac{\cos at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}+\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
46	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}}$
47	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$
48	$\mathrm{e}^{-at^2}, \operatorname{Re}(a)>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
49	$\lvert t\rvert$	$-\frac{2}{\omega^2}$
50	$\frac{1}{\lvert t\rvert}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\lvert\omega\rvert}$

附录 II　Laplace 变换简表

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	$t^m\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$
4	$t^m\mathrm{e}^{at}\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
9	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
10	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11	$t\sinh at$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
12	$t\cosh at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
13	$t^m\sin at\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2\mathrm{j}(s^2+a^2)^{m+1}}\cdot[(s+\mathrm{j}a)^{m+1}-(s-\mathrm{j}a)^{m+1}]$
14	$t^m\cos at\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2(s^2+a^2)^{m+1}}\cdot[(s+\mathrm{j}a)^{m+1}+(s-\mathrm{j}a)^{m+1}]$
15	$\mathrm{e}^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
16	$\mathrm{e}^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
17	$e^{-bt}\sin(at+c)$	$\dfrac{(s+b)\sin c + a\cos c}{(s+b)^2+a^2}$
18	$\sin^2 t$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+4}\right)$
19	$\cos^2 t$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+4}\right)$
20	$\sin at \sin bt$	$\dfrac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$
21	$e^{at}-e^{bt}$	$\dfrac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
22	$ae^{at}-be^{bt}$	$\dfrac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$
23	$\dfrac{1}{a}\sin at-\dfrac{1}{b}\sin bt$	$\dfrac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
24	$\cos at-\cos bt$	$\dfrac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
25	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$
26	$\dfrac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
27	$\dfrac{1}{a^4}(\cos at-1)+\dfrac{1}{2a^2}t^2$	$\dfrac{1}{s^3(s^2+a^2)}$
28	$\dfrac{1}{a^4}(\cosh at-1)-\dfrac{1}{2a^2}t^2$	$\dfrac{1}{s^3(s^2-a^2)}$
29	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$
30	$\dfrac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
31	$\dfrac{1}{a^4}(1-\cos at)-\dfrac{1}{2a^3}t\sin at$	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)^2}$
32	$(1-at)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$
33	$t\left(1-\dfrac{a}{2}t\right)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^3}$
34	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\dfrac{1}{s(s+a)}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
35[①]	$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{e^{-bt}}{b}-\dfrac{e^{-at}}{a}\right)$	$\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$
36[①]	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
37[①]	$\dfrac{ae^{-at}}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{be^{-bt}}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{ce^{-ct}}{(b-c)(c-a)}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
38[①]	$\dfrac{a^2e^{-at}}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{b^2e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{c^2e^{-ct}}{(b-c)(a-c)}$	$\dfrac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
39[①]	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}[1-(a-b)t]}{(a-b)^2}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
40[①]	$\dfrac{[a-b(a-b)t]e^{-bt}-ae^{-at}}{(a-b)^2}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
41	$e^{-at}-e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$	$\dfrac{3a^2}{s^3+a^3}$
42	$\sin at\cosh at-\cos at\sinh at$	$\dfrac{4a^3}{s^4+4a^4}$
43	$\dfrac{1}{2a^2}\sin at\sinh at$	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$
44	$\dfrac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$
45	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$
46	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$
47	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s}}$
48	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$	$\dfrac{s}{(s-a)\sqrt{s-a}}$
49	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$
50	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
51	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cosh 2\sqrt{at}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$
52	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{at}$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
53	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sinh 2\sqrt{at}$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$
54	$\dfrac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$	$\ln\dfrac{s-a}{s-b}$
55	$\dfrac{2}{t}\sinh at$	$\ln\dfrac{s+a}{s-a}=2\operatorname{artanh}\dfrac{a}{s}$
56	$\dfrac{2}{t}(1-\cos at)$	$\ln\dfrac{s^2+a^2}{s^2}$
57	$\dfrac{2}{t}(1-\cosh at)$	$\ln\dfrac{s^2-a^2}{s^2}$
58	$\dfrac{1}{t}\sin at$	$\arctan\dfrac{a}{s}$
59	$\dfrac{1}{t}(\cosh at-\cos bt)$	$\ln\sqrt{\dfrac{s^2+b^2}{s^2-a^2}}$
60[2]	$\dfrac{1}{\pi t}\sin(2a\sqrt{t})$	$\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{s}}\right)$
61[2]	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{s}}\right)$
62	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$
63	$\operatorname{erf}\left(\dfrac{t}{2a}\right)$	$\dfrac{1}{s}e^{a^2s^2}\operatorname{erfc}(as)$
64	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2\sqrt{at}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\dfrac{a}{s}}\right)$
65	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{as}\operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
66	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
67	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}e^{at}\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$
68	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
69	$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$
70	$t^m u(t)\ (m>-1)$	$\dfrac{1}{s^{m+1}}\Gamma(m+1)$
71	$\delta(t)$	1
72	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
73	$\operatorname{sgn} t$	$\dfrac{1}{s}$
74[3]	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
75[3]	$I_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$
76	$J_0(2\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{s}e^{-\frac{a}{s}}$
77	$e^{-bt}I_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{(s+b)^2-a^2}}$
78	$tJ_0(at)$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$
79	$tI_0(at)$	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$
80	$J_0\left(a\sqrt{t(t+2b)}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}$
81	$\dfrac{1}{at}J_1(at)$	$\dfrac{1}{s+\sqrt{s^2+a^2}}$
82	$J_1(at)$	$\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right)$
83	$J_n(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}(\sqrt{s^2+1}-s)^n$
84	$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}e^{-\frac{1}{s}}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
85	$\frac{1}{t}J_n(at)$	$\frac{1}{na^n}(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n$
86	$\int_t^{\infty}\frac{J_0(t)}{t}dt$	$\frac{1}{s}\ln(s+\sqrt{s^2+1})$
87④	si t	$\frac{1}{s}\mathrm{arccot}\, s$
88⑤	ci t	$\frac{1}{s}\ln\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

① 式中 a,b,c 为不相等的常数.

② $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$,称为误差函数.

$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt$,称为余误差函数.

③ $J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$,$I_n(x)=j^{-n}J_n(jx)$,$J_n$ 称为第一类 n 阶 Bessel 函数.I_n 称为第一类 n 阶变形的 Bessel 函数,或称为虚宗量的 Bessel 函数.

④ $\mathrm{si}\, t=\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt$ 称为正弦积分.

⑤ $\mathrm{ci}\, t=\int_{-\infty}^t\frac{\cos t}{t}dt$ 称为余弦积分.

习题答案

第一章

习题一

2. (1) $f(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega t\,d\omega$,

(2) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$,

(3) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega\ (|t|\neq 0,1)$,

而左端的 $f(t)$ 在它的间断点 $t_0=-1,0,1$ 处,应以 $\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$ 代替.

3. (1) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\,d\omega$,

(2) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^2+4}\cos\omega t\,d\omega$,

(3) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega$.

4. $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}\sin\omega t\,d\omega$,

$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\,d\omega$.

习题二

1. $F(\omega)=\frac{A(1-e^{-j\omega\tau})}{j\omega}$.

3. (1) $F(\omega)=\frac{\alpha(\beta-j\omega)}{\beta^2+\omega^2}$; (2) $F(\omega)=\frac{2\omega\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$.

4. $F_s(\omega)=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}$.

6. $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[u(1+t)+u(1-t)-1], & |t|\neq 1,\\ \dfrac{1}{4}, & |t|=1.\end{cases}$

7. $f(t)=\cos\omega_0 t$.

8. $F(\omega)=\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$.

9. $F(\omega)=\cos\omega a+\cos\dfrac{\omega a}{2}$.

10. $F(\omega)=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{j}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$.

11. $F(\omega)=\dfrac{\pi}{4}\mathrm{j}[3\delta(\omega+1)-\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)-3\delta(\omega-1)]$.

12. $F(\omega)=\dfrac{\pi}{2}[(\sqrt{3}+\mathrm{j})\delta(\omega+5)+(\sqrt{3}-\mathrm{j})\delta(\omega-5)]$.

16. $F(\omega)=\dfrac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$.

17. $A_0=2|c_0|=h, A_n=2|c_n|=\dfrac{h}{n\pi}, \omega_n=n\omega=\dfrac{2n\pi}{T}(n=1,2,\cdots)$.

18. $F(\omega)=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$.

习 题 三

10. $F(\omega)=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}\sqrt{\pi}\omega\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

11. (1) $\dfrac{\mathrm{j}}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$; (2) $\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)-2F(\omega)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{j}}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(\dfrac{-\omega}{2}\right)-F\left(\dfrac{-\omega}{2}\right)$; (4) $\dfrac{1}{2\mathrm{j}}\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\omega^3}F\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$;

(5) $-F(\omega)-\omega\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)$; (6) $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F(-\omega)$;

(7) $-\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(-\omega)$; (8) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\mathrm{j}\omega}F\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.

12. (1) π; (2) $\dfrac{\pi}{2}$; (3) $\dfrac{\pi}{2}$; (4) $\dfrac{\pi}{2}$.

习 题 四

2. $f_1(t)*f_2(t)=\dfrac{a\sin t-\cos t+\mathrm{e}^{-at}}{a^2+1}$.

3. $f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0;\\ \dfrac{1}{2}(\sin t-\cos t+\mathrm{e}^{-t}), & 0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}), & t>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

5. (1) $F(\omega)=\dfrac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\dfrac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$,

(2) $F(\omega)=\dfrac{\omega_0}{(\beta+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$,

(3) $F(\omega)=\dfrac{\beta+\mathrm{j}\omega}{(\beta+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$,

(4) $F(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$,

(5) $F(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t_0}\left[\dfrac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$,

(6) $F(\omega)=-\dfrac{1}{(\omega-\omega_0)^2}+\pi\mathrm{j}\delta'(\omega-\omega_0)$.

7. $S(\omega)=\dfrac{a}{4a^2+\omega^2}$.

8. $S(\omega)=\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$.

9. $S(\omega)=\dfrac{1}{a^2+\omega^2}$.

10. $R_{12}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{b}{2a}(a^2-\tau^2), & -a\leqslant\tau\leqslant 0;\\ \dfrac{b}{2a}(a-\tau)^2, & 0<\tau\leqslant a;\\ 0, & |\tau|>a.\end{cases}$

习 题 五

1. $x(t)=\begin{cases}0 & t<0;\\ \mathrm{e}^{-t} & t\geqslant 0.\end{cases}$

2. $F(\omega)=\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3. (1) $g(\omega)=\begin{cases}1, & 0<\omega<1,\\ \frac{1}{2}, & \omega=1,\\ 0, & \omega>1;\end{cases}$ (2) $g(\omega)=\frac{2}{\pi\omega}(1+\cos\omega-2\cos 2\omega)$;

(3) $g(\omega)=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$; (4) $g(\omega)=\frac{\omega}{\omega^2-1}(1+\cos\omega\pi)$.

4. (1) $y(t)=\frac{a(b-a)}{\pi b[t^2+(b-a)^2]}$;

(2) $y(t)=\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

5. (1) $x(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}), & t<0,\\ 0, & t=0,\\ \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}), & t>0;\end{cases}$

(2) $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cH(\omega)}{aj\omega+bF(\omega)}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$,

其中 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, $H(\omega)=\mathscr{F}[h(t)]$.

6. (1) $u(x,t)=t\sin x$.

(2) $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{At-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$.

(3) (i) $u(x,y)=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{y}$;

(ii) $u(x,y)=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1+x}{y}\right)+\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right)\right]$

(4) $u(x,t)=\frac{2A}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}\mathrm{d}\omega$,

其中 $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,称为误差函数.

(5) $u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\mathrm{e}^{-\omega^2t}\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega$.

第 二 章

习 题 一

1. (1) $F(s)=\frac{2}{4s^2+1}$, $(\mathrm{Re}(s)>0)$, (2) $F(s)=\frac{1}{s+2}$, $(\mathrm{Re}(s)>-2)$,

(3) $F(s)=\frac{2}{s^3}$, $(\mathrm{Re}(s)>0)$, (4) $F(s)=\frac{1}{s^2+4}$, $(\mathrm{Re}(s)>0)$,

(5) $F(s)=\frac{k}{s^2-k^2}(\mathrm{Re}(s)>|k|)$, (6) $F(s)=\frac{s}{s^2-k^2}(\mathrm{Re}(s)>|\mathrm{Re}(k)|)$,

(7) $F(s)=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$, $(\mathrm{Re}(s)>0)$, (8) $F(s)=\frac{2}{s(s^2+4)}$, $(\mathrm{Re}(s)>0)$.

2. (1) $F(s)=\frac{1}{s}(3-4\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-4s})$,

(2) $F(s)=\frac{3}{s}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi s}{2}})-\frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\frac{\pi s}{2}}$,

(3) $F(s)=\frac{1}{s-2}+5=\frac{5s-9}{s-2}$,

(4) $F(s)=1-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}$.

3. $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\pi s})(s^2+1)}$.

4. (1) $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1+bs}{s^2}-\frac{b}{s(1-\mathrm{e}^{-bs})}$,

(2) $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1+s^2}\coth\frac{\pi s}{2}$,

(3) $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s(1+\mathrm{e}^{-as})}\tanh as$,

(4) $\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}\tanh\frac{bs}{2}$.

习 题 二

1. (1) $F(s)=\frac{1}{s^3}(2s^2+3s+2)$, (2) $F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}$,

(3) $F(s)=\dfrac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}$,　(4) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$,

(5) $F(s)=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$,　(6) $F(s)=\dfrac{10-3s}{s^2+4}$,

(7) $F(s)=\dfrac{6}{(s+2)^2+36}$,　(8) $F(s)=\dfrac{s+4}{(s+4)^2+16}$,

(9) $F(s)=\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$（$n$ 为正整数）.　(10) $F(s)=\dfrac{1}{s}e^{-\frac{5}{3}s}$,

(11) $F(s)=\dfrac{1}{s}$,　(12) $F(s)=\sqrt{\dfrac{\pi}{s-3}}$.

2. (1) $\arctan\dfrac{a}{s}$;　(2) $\dfrac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$;

(3) $aF(as+1)$;　(4) $aF(as+a^2)$.

3. (1) $F(s)=\dfrac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}$,　(2) $F(s)=\dfrac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$,

(3) $f(t)=\dfrac{2}{t}\sinh t$,　(4) $F(s)=\dfrac{4(s+3)}{s[(s+3)^2+4]^2}$.

4. (1) $F(s)=\operatorname{arccot}\dfrac{s}{k}$,　(2) $F(s)=\operatorname{arccot}\dfrac{s+3}{2}$.

(3) $f(t)=\dfrac{t}{2}\sinh t$,　(4) $F(s)=\dfrac{1}{s}\operatorname{arccot}\dfrac{s+3}{2}$.

5. (1) $\ln 2$,　(2) $\dfrac{1}{2}\ln 2$,

(3) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{m^2+n^2}{a^2+b^2}$,　(4) $\dfrac{3}{13}$,

(5) $\dfrac{1}{4}$,　(6) $\dfrac{12}{169}$,

(7) $\dfrac{\pi}{8}$,　(8) $\dfrac{1}{4}\ln 5$,

(9) 0,　(10) $\dfrac{\pi}{2}$,

(11) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,　(12) 1.

6. (1) $f(t)=\dfrac{1}{2}\sin 2t$,　(2) $f(t)=\dfrac{1}{6}t^3$,

(3) $f(t)=\dfrac{1}{6}t^3e^{-t}$,　(4) $f(t)=e^{-3t}$,

(5) $f(t)=2\cos 3t+\sin 3t$,　(6) $f(t)=\dfrac{3}{2}e^{3t}-\dfrac{1}{2}e^{-t}$,

(7) $f(t)=\dfrac{1}{5}(3e^{2t}+2e^{-3t})$,

(8) $f(t)=2e^{-2t}\cos 3t+\dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$.

7. (1) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{A}{s}\tanh\dfrac{s\tau}{2}$,

(2) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s\sinh s\tau}$,

(3) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{2}{s}(4-e^{-2s})$,

(4) $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{2s}\left(1+\coth\dfrac{s\tau}{2}\right)$.

习　题　三

2. (1) $f(t)=\dfrac{1}{a}\sin at$,　(2) $f(t)=\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$,

(3) $f(t)=\dfrac{c-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\left[\dfrac{c-b}{a-b}t+\dfrac{a-c}{(a-b)^2}\right]e^{-bt}$,

(4) $f(t)=\dfrac{3}{2a}\sin at-\dfrac{1}{2}t\cos at$,

(5) $f(t)=\dfrac{1}{a^4}(\cos at-1)+\dfrac{1}{2a^2}t^2$,

(6) $f(t)=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{a-b}\left[\dfrac{e^{-at}}{a}-\dfrac{e^{-bt}}{b}\right]$,

(7) $f(t)=\dfrac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$,

(8) $f(t)=2te^t+2e^t-1$,

(9) $f(t)=\sinh t-t$,

(10) $f(t)=\dfrac{1}{3}\cos t-\dfrac{1}{3}\cos 2t$.

3. (1) $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{16}-\dfrac{t\cos 2t}{8}$,

(2) $f(t)=\delta(t)-2e^{-2t}$,

(3) $f(t)=\dfrac{1}{2}(1+2e^{-t}-3e^{-2t})$,

(4) $f(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$,

(5) $f(t)=\frac{1}{9}\left(\sin\frac{2}{3}t+\cos\frac{2}{3}t\right)e^{-\frac{1}{3}t}$,

(6) $f(t)=\frac{2(1-\cosh t)}{t}$,

(7) $f(t)=\frac{1}{2}te^{-2t}\sin t$,

(8) $f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t-t\cos t)$,

(9) $f(t)=\left(\frac{1}{2}t\cos 3t+\frac{1}{6}\sin 3t\right)e^{-2t}$,

(10) $f(t)=3e^{-t}-11e^{-2t}+10e^{-3t}$,

(11) $f(t)=\frac{1}{3}e^{-t}(2-2\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)$,

(12) $f(t)=\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{3}{2}te^{-3t}-3t^2e^{-3t}$,

(13) $f(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<2, \\ 2(t-1), & t\geqslant 2. \end{cases}$

(14) $f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+2e^{-t}-e^{-2t}$.

习　题　四

1. (1) t,　　(2) $\frac{1}{6}t^3$,

(3) $\frac{m!\ n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$,　　(4) e^t-t-1,

(5) $\frac{1}{2}t\sin t$,　　(6) $\frac{1}{2k}\sin kt-\frac{t}{2}\cos kt$,

(7) $\sinh t-t$,　　(8) $\frac{1}{2a}(at\cosh at-\sinh at)$,

(9) $\begin{cases} 0, & t<a \\ \int_a^t f(t-\tau)d\tau, & 0\leqslant a\leqslant t, \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} 0, & t<a \\ f(t-a). & 0\leqslant a\leqslant t. \end{cases}$

4. $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau$.

习　题　五

1. (1) $y(t)=e^{2t}-e^t$,

(2) $y(t)=\frac{1}{4}[(7+2t)e^{-t}-3e^{-3t}]$,

(3) $y(t)=e^{-t}-e^{-2t}+[-e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}+\frac{1}{2}]u(t-1)$,

(4) $y(t)=te^t\sin t$,

(5) $y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}(\sin t+\sin 2t)$,

(6) $y(t)=-2\sin t-\cos 2t$,

(7) $y(t)=h(t)*e^{-2t}\sin t+e^{-2t}[c_1\cos t+c\sin t],(c=2c_1+c_2)$,

(8) $y(t)=1-\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)e^{-t}$,

(9) $y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t$,

(10) $y(t)=t^3e^{-t}$,

(11) $y(t)=\left(\frac{1}{60}t^5-\frac{1}{2}t^2-t+1\right)e^t$,

(12) $y(t)=\frac{1}{2}t\sin t$,

(13) $y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}(c_0+\frac{1}{2})t^2+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$,

(14) $y(t)=2te^{t-1}$,

(15) $y(t)=\frac{\sinh t}{\sinh 2\pi}$,

(16) $y(t)=\sin t-\frac{10}{3}\sin 2t$.

2. (1) $y(t)=3J_0(2t)$，J_0 为零阶第一类 Bessel 函数，

(2) $y(t)=\frac{\sin t}{t}$,

(3) $y(t)=(2+c_1t^3)e^{-t}$，(c_1 为任意常数)，

(4) $y(t)=5e^{-t}$,

(5) $y(t)=ct^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$，$J_n$ 为 n 阶第一类 Bessel 函数，

(6) $y(t)=\dfrac{t}{n-1}+c_1t^n$,($c_1$ 为任意常数).

3. (1) $y(t)=a\left(t+\dfrac{1}{6}t^3\right)$,

(2) $y(t)=(1-t)e^{-t}$,

(3) $y(t)=8J_0(4t)$ 及 $y(t)=-8J_0(4t)$,

(4) $y(t)=-3+5t-t^2$,

(5) $y(t)=4\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}e^{-t}$ 及 $y(t)=-4\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}e^{-t}$

(6) $y(t)=J_1(2t)$ 及 $y(t)=\delta(t)-J_1(2t)$,

其中 J_1 为一阶第一类 Bessel 函数.

4. (1) $y(t)=1+\dfrac{1}{2}t^2$,

(2) $y(t)=\sin t$,

(3) $y(t)=e^{-(t-b)}\sin(t-b)u(t-b)-2e^{-t}(\cos t-\sin t)$,

(4) $y(t)=5(-e^{-t}+4e^{-2t}-3e^{-3t})$,

(5) $y(t)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{3}{8}e^{2t}+\dfrac{1}{4}te^{2t}$,

(6) $y(t)=2(e^{-(t-1)}-e^{-2(t-1)})u(t-1)$

$-2(e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)})u(t-2)+2e^{-2t}-e^{-t}$.

5. (1) $\begin{cases}x(t)=e^t,\\ y(t)=e^t,\end{cases}$

(2) $\begin{cases}y(t)=(1-2\cos t)*f(t),\\ z(t)=-\cos t*f(t),\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x(t)=\dfrac{2}{3}\cos 2t+\dfrac{1}{3}\sin 2t+\dfrac{1}{3}e^t;\\ y(t)=-\dfrac{2}{3}\cos 2t-\dfrac{1}{3}\sin 2t+\dfrac{2}{3}e^t,\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x(t)=\dfrac{2}{3}\cosh(\sqrt{2}t)+\dfrac{1}{3}\cos t,\\ y(t)=z(t)=-\dfrac{1}{3}\cosh(\sqrt{2}t)+\dfrac{1}{3}\cos t,\end{cases}$

(5) $\begin{cases}y(t)=J_0(t),\\ z(t)=-J_1(t)-e^{-t},\end{cases}$

(6) $\begin{cases}y(t)=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{5}{3}t-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-t},\\ z(t)=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}te^{-t}+\cos t,\end{cases}$

(7) $\begin{cases}y(t)=-\dfrac{7}{5}e^t+\dfrac{1}{2}(5+t-t^2)-\dfrac{1}{20}(\sin 2t+2\cos 2t),\\ z(t)=\dfrac{21}{5}e^t+2t+\dfrac{1}{5}(2\sin 2t-\cos 2t),\end{cases}$

(8) $\begin{cases}x(t)=3+\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{13}{4}e^t+\dfrac{5}{2}te^t,\\ y(t)=-\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{15}{2}te^t-\dfrac{31}{4}e^t.\end{cases}$

6. (1) $u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{g}{2}t^2, & t<\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{gx}{2a^2}(2at-x), & t>\dfrac{x}{a};\end{cases}$

(2) $u(x,t)=\dfrac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\left(v^2+\frac{hx^2}{4a^2v^2}\right)}dv$;

(3) $u(x,t)=\dfrac{x^3y^2}{6}+3y+x^2$;

(4) $u(x,t)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x\varphi(\tau)\sin a(\tau-x)d\tau$;

(5) $u(x,t)=\begin{cases}\psi(t), x-t<0,\\ \psi(t)+\varphi(x-t), & x-t>0;\end{cases}$

(6) $u(x,t)=u_{\frac{l-x}{a}}(t)\varphi\left(t-\dfrac{l-x}{a}\right)-u_{\frac{l+x}{a}}(t)\varphi\left(t-\dfrac{l+x}{a}\right)$

$+u_{\frac{3l-x}{a}}(t)\varphi\left(t-\dfrac{3l-x}{a}\right)-u_{\frac{3l+x}{a}}(t)\varphi\left(t-\dfrac{3l+x}{a}\right)$,

其中 $u_\alpha(t)=\begin{cases}0, t<\alpha;\\ 1, t\geqslant\alpha,\end{cases}(\alpha\geqslant 0)$.

7. $x(t)=\dfrac{K}{m}t$.

8. $i(t)=\dfrac{E}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right],(t>t_0)$.

9. $i(t)=E\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}\delta(t)+\dfrac{E}{R_1+R_2}\left[1+\dfrac{(R_1C_1-R_2C_2)^2}{(C_1+C_2)^2R_1R_2}e^{-\frac{R_1+R_2}{(C_1+C_2)R_1R_2}t}\right]$.

10. $y(t)=\dfrac{AK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-\arctan\omega T)$.

11. (1) $G(s)=\dfrac{2}{s+1}$;

(2) $g(t)=2e^{-t}$;

(3) $G(j\omega)=\dfrac{2(1-j\omega)}{1+\omega^2}$.

12. $x(t)=e^{-(t-1)}u(t-1)$.

策划编辑 李艳馥
责任编辑 胡乃冏
封面设计 于 涛
责任绘图 郝 林
版式设计 张 岚
责任校对 存 怡
责任印制 宋克学